



Departamento de Física, Facultad de Ciencias, Universidad de Chile.

Las Palmeras 3425, Ñuñoa. Casilla 653, Correo 1, Santiago

FONO: 562 678 7276 FAX: 562 271 2973

E-MAIL: secretaria@fisica.ciencias.uchile.cl

Apuntes de un curso de

FÍSICA MATEMÁTICA

segunda edición

José Rogan C.

Víctor Muñoz G.

Segundo Curso

**MÉTODOS DE LA FÍSICA
MATEMÁTICA I**

Índice

I	Series y Variable Compleja	1
1.	Series infinitas.	3
1.1.	Conceptos fundamentales	3
1.2.	Pruebas de Convergencia	6
1.2.1.	Pruebas de comparación.	6
1.2.2.	Prueba de la raíz de Cauchy.	7
1.2.3.	Prueba de la razón de D' Alembert o Cauchy.	8
1.2.4.	Prueba integral de Cauchy o Maclaurin.	9
1.2.5.	Prueba de Kummer.	11
1.2.6.	Prueba de Raabe.	11
1.2.7.	Prueba de Gauss.	12
1.2.8.	Mejoramiento de convergencia.	13
1.3.	Series alternadas.	14
1.3.1.	Criterio de Leibniz.	14
1.3.2.	Convergencia absoluta.	15
1.4.	Álgebra de series.	16
1.4.1.	Mejoramiento de la convergencia, aproximaciones racionales.	17
1.4.2.	Reordenamiento de series dobles.	18
1.5.	Series de funciones.	20
1.5.1.	Convergencia uniforme.	20
1.5.2.	Prueba M de Weierstrass.	21
1.5.3.	Prueba de Abel.	23
1.6.	Expansión de Taylor.	24
1.6.1.	Teorema de Maclaurin.	25
1.6.2.	Teorema Binomial.	27
1.6.3.	Expansión de Taylor de más de una variable.	29
1.7.	Series de potencias.	29
1.7.1.	Convergencia.	30
1.8.	Convergencia uniforme y absoluta.	30
1.8.1.	Continuidad.	30
1.8.2.	Diferenciación e integración.	30
1.8.3.	Teorema de unicidad.	31
1.8.4.	Inversión de series de potencia.	32
1.9.	Integrales elípticas.	33
1.9.1.	Definiciones.	34

1.9.2.	Expansión de series.	35
1.9.3.	Valores límites.	36
1.10.	Números de Bernoulli.	37
1.10.1.	Funciones de Bernoulli.	39
1.10.2.	Fórmula de integración de Euler-Maclaurin.	40
1.11.	Función zeta de Riemann.	41
1.11.1.	Mejoramiento de la convergencia.	44
1.12.	Series asintóticas o semi-convergentes.	44
1.12.1.	Función gama incompleta.	45
1.12.2.	Integrales coseno y seno.	47
1.12.3.	Definición de series asintóticas.	48
1.12.4.	Aplicaciones a cálculo numérico.	49
1.13.	Productos infinitos.	49
1.13.1.	Convergencia de un producto infinito.	50
1.13.2.	Funciones seno, coseno y gama.	51
2.	Números Complejos	53
2.1.	Introducción.	53
2.2.	Plano complejo.	55
2.3.	Representación polar.	57
2.4.	Distancia en el plano complejo.	57
2.5.	Desigualdad triangular.	57
2.6.	Isomorfismo con matrices.	59
2.7.	Sucesión de números complejos.	59
2.8.	Series de números complejos.	59
2.8.1.	Pruebas más comunes para la convergencia absoluta.	60
2.8.2.	Radio de convergencia.	60
2.8.3.	La serie exponencial.	61
2.9.	Relación de Euler.	62
2.10.	Fórmula de Moivre.	63
2.11.	Ecuación ciclotónica.	63
3.	Ejemplos sencillos de funciones complejas	65
3.1.	Notación.	65
3.2.	Ejemplo 1, traslación.	66
3.3.	Ejemplo 2, rotación en torno al origen.	66
3.4.	Ejemplo 3, reflexión respecto al eje real.	67
3.5.	Ejemplo 4, rotación más traslación.	68
3.6.	Ejemplo 5, transformación cuadrática.	69
3.7.	Ejemplo 6, transformación exponencial.	70
3.8.	Ejemplo 7, transformación de Joukowski.	71
3.9.	Ejemplo 8, inverso.	72
3.10.	Ejemplo 9, inverso conjugado.	73
3.11.	Mapeo sobre la esfera ζ de Riemann.	74
3.11.1.	Algunas propiedades de esta proyección.	74

3.11.2. Mapeo de z y $1/z^*$ y su relación.	75
4. Transformaciones homográficas y rotaciones de la esfera.	77
5. Derivabilidad.	83
5.1. Identidades de Cauchy-Riemann.	83
5.2. Ecuaciones de Laplace.	86
5.3. Interpretación hidrodinámica de las identidades de Cauchy-Riemann.	89
5.4. Familias ortogonales.	91
6. Integración.	93
6.1. Definiciones	93
6.2. Interior de una curva cerrada sin puntos dobles.	96
6.3. Recorrido del contorno de un dominio.	97
6.4. Integrales de línea en el plano complejo.	99
6.5. Evaluación de integrales impropias reales.	104
6.6. Fórmula integral de Cauchy.	105
7. Series de Potencias.	109
7.1. Series y radio de convergencia.	109
7.2. Propiedades.	112
7.3. Máximos, mínimos y funciones armónicas.	118
7.4. Números de Bernoulli.	120
8. Prolongación Analítica.	123
8.1. Definiciones.	123
8.2. Lema de Heine-Borel	124
8.3. Teorema de identidad.	125
8.4. Prolongación analítica.	126
8.5. Función ζ de Riemann.	131
8.6. Lugares nulos y a -lugares.	132
8.7. Comportamiento en infinito.	134
9. Funciones Multivaluadas.	137
9.1. Función \sqrt{z}	137
9.2. Superficies de Riemann.	140
9.3. Otros puntos de ramificación.	141
9.4. La función Logaritmo.	143
9.5. La función Arcotangente.	145
10. Desarrollo de Laurent.	149
10.1. Desarrollo en torno a $z_0 = 0$	149
10.2. Desarrollo en torno a z_0	150
10.3. Unicidad del desarrollo de Laurent.	151
10.4. Ejemplos.	151
10.5. Definiciones.	153

10.6. La función Arcosecante.	154
10.7. Funciones enteras.	156
11. Residuos.	159
11.1. Definición y teorema.	159
11.2. Funciones racionales.	161
11.3. Funciones trigonométricas.	161
11.4. Polos, residuos y lugares nulos.	164
11.5. Ejemplos.	167
11.5.1. Residuos de un polo de orden m	172
11.6. Valor principal de Cauchy.	172
12. Funciones Meromorfas.	175
13. La función Γ.	181
13.1. Definición.	181
13.2. Exploración.	182
13.3. Definiciones precisas.	183
13.4. Representaciones integrales de Γ	186
13.5. La función Beta.	188
13.5.1. Casos particulares.	188
14. Representación Conforme.	191
14.1. Introducción.	191
14.2. Representación conforme.	191
14.3. Transformaciones de funciones armónicas.	193
14.4. Transformaciones de las condiciones de borde.	196
14.5. Aplicaciones	198
14.5.1. Temperaturas estacionarias en una pared semi-infinita.	199
15. Ecuaciones diferenciales.	203
15.1. Ecuaciones diferenciales parciales	203
15.1.1. Ejemplos de PDE.	204
15.1.2. Clases de PDE y característica.	206
15.1.3. Las PDE no lineales.	208
15.1.4. Condiciones de borde.	209
15.2. Ecuaciones diferenciales de primer orden.	209
15.2.1. Variables separables.	210
15.2.2. Ecuaciones diferenciales exactas.	211
15.2.3. Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden lineales.	212
15.2.4. Conversión a una ecuación integral.	214
15.3. Separación de variables.	215
15.3.1. Coordenadas cartesianas.	215
15.3.2. Coordenadas cilíndricas circulares.	216
15.3.3. Coordenadas polares esféricas.	218

Índice de figuras

1.1. Prueba de comparación.	7
1.2. Comparación de integral con suma de bloques	9
1.3. Rearreglo de serie armónica	17
1.4. Series dobles.	18
1.5. Series dobles.	19
1.6. Series dobles.	19
1.7. Convergencia uniforme.	21
1.8. Péndulo simple	33
1.9. Integrales elípticas.	35
1.10. Función zeta de Riemann.	42
1.11. Sumas parciales.	46
2.1. Plano complejo.	55
2.2. Complejo conjugado.	56
2.3. Representación polar.	58
2.4. Distancia en el plano complejo.	58
2.5. Convergencia de una serie en el plano complejo.	60
2.6. Convergencia en el plano complejo.	61
2.7. Las raíces sextas de la unidad.	64
3.1. Función compleja.	65
3.2. Función traslación en a	66
3.3. Función rotación en torno al origen.	66
3.4. Función reflexión respecto al eje real.	67
3.5. Función reflexión respecto al eje imaginario.	67
3.6. Función rotación más traslación.	68
3.7. ejemplo de mapeo	68
3.8. Transformación cuadrática.	69
3.9. Mapeo z^2 para rectas ortogonales.	70
3.10. Mapeo e^z para rectas ortogonales.	71
3.11. Transformación de Joukowsky para círculos y rectas radiales.	72
3.12. Mapeo $1/z$ para los diferentes cuadrantes.	73
3.13. Mapeo $1/z^*$	73
3.14. Esfera de Riemann.	74
3.15. Mapeo sobre la esfera de círculos y líneas.	75

3.16. Mapeo sobre la esfera de rectas que se cruzan.	75
3.17. Mapeo de z y $1/z^*$ y su relación sobre la esfera.	76
4.1. Puntos diametralmente opuestos en la esfera.	80
5.1. Funciones en dominios abiertos.	83
5.2. $\text{Imag}F(z) = \varphi = \text{cte.}$	90
5.3. $\text{Imag}F(z) = \ln r = \text{cte.}$	91
5.4. Familias de curvas ortogonales.	92
6.1. Curva seccionalmente lisa y orientada.	93
6.2. Curva parametrizada.	94
6.3. Otra curva parametrizada.	94
6.4. Curva con y sin puntos dobles.	95
6.5. Dominio simplemente conexo.	95
6.6. Dominio no simplemente conexo.	95
6.7. Dominio múltiplemente conexo.	96
6.8. Interior de curva I.	96
6.9. Interior de curva II.	96
6.10. Interior de curva III.	97
6.11. Triángulo.	98
6.12. Curva cerrada.	98
6.13. Polígono.	99
6.14. Camino Γ en el plano complejo.	100
6.15. Camino Γ	101
6.16. Camino cerrado Γ	101
6.17. Camino cerrado Γ	102
6.18. Camino cerrado Γ	104
6.19. Camino Γ	106
7.1. Sucesión $\text{sen}^n x$	111
7.2. Radios de convergencia.	112
7.3. Región simplemente conexa $\text{Re}(z) > 0$	116
7.4. Región de convergencia.	118
8.1. Conjunto acotado.	123
8.2. Punto límite.	123
8.3. Lema de Heine-Borel I.	124
8.4. Lema de Heine-Borel II.	125
8.5. Teorema de identidad.	125
8.6. Conjuntos D_1 y D_2	126
8.7. Zona de convergencia de $1/(1 - z)$	126
8.8. Prolongación analítica.	127
8.9. Prolongación al plano complejo.	128
8.10. Agrandar el radio de convergencia.	128
8.11. Obstáculos para la función $z \cot z$	129

8.12. Desarrollos para la función $1/(1 - z)$.	129
8.13. Función ζ de Riemann.	131
8.14. Prolongación al plano complejo de la función ζ .	132
9.1. La función $f(z) = z^2$.	137
9.2. La función $f(x) = \sqrt{x}$.	137
9.3. Círculo de convergencia del desarrollo de \sqrt{z} .	138
9.4. El eje real negativo para \sqrt{z} .	139
9.5. Función con línea de ramificación.	139
9.6. Después de dos vueltas se vuelve al mismo punto.	140
9.7. Las dos superficies de Riemann de \sqrt{z} .	140
9.8. Punto de ramificación de $\sqrt{z - a}$.	141
9.9. Dos puntos de ramificación.	142
9.10. Otra línea de ramificación.	142
9.11. Línea de ramificación sobre la esfera de Riemann.	143
9.12. Función logaritmo sobre el eje real.	143
9.13. Radio de convergencia para (9.5).	144
9.14. Camino de integración para (9.6).	144
9.15. Camino de integración para (9.10).	146
9.16. Camino de integración en torno a $+i$.	146
9.17. Camino de integración en torno a $-i$.	146
9.18. Función arcotangente.	147
10.1. Región anular.	149
10.2. La función $f(z) = 1/(z - 1)$.	152
10.3. La función $f(z) = 1/(z - 1)(z - 2)$.	152
10.4. La región donde f es univaluada y holomorfa.	153
10.5. Singularidades de la función $1/\text{sen } z$.	154
10.6. Zona de convergencia.	156
11.1. Región donde f es analítica.	159
11.2. Camino de integración.	160
11.3. Camino de integración.	161
11.4. Camino de integración.	162
11.5. Camino de integración ejemplo I.	167
11.6. Elección de rama.	168
11.7. Camino de integración ejemplo II.	168
11.8. Camino de integración ejemplo III.	169
11.9. Camino de integración ejemplo IV.	171
11.10. Camino de integración.	172
12.1. Malla.	178
13.1. Valores de la función Γ .	181
13.2. Acotando el límite.	184
13.3. La función Γ .	185

14.1. Transformación $w = f(z)$	191
14.2. Par de curvas bajo la transformación $w = f(z)$	192
14.3. Mapeo isogonal.	192
14.4. Mapeo $w = z^2$	193
14.5. Condiciones de borde de primera clase (Dirichlet).	194
14.6. Región donde $H(u, v)$ es armónica.	195
14.7. Mapeo de una condición de borde.	196
14.8. Curvas ortogonales.	197
14.9. Mapeo de una particular condición de borde.	198
14.10 Geometría del sólido.	198
14.11 Curvas ortogonales.	199
14.12 Pared semi-infinita.	199
14.13 Transformación conforme.	200
14.14 Transformación conforme $w = \text{Log}[(z' - 1)/(z' + 1)]$	200

Parte I
Series y Variable Compleja

Capítulo 1

Series infinitas.

versión final corregida 2.31, 6 de Mayo del 2003¹

1.1. Conceptos fundamentales

Las series infinitas, literalmente sumas de un número infinito de términos, ocurre frecuentemente tanto en matemáticas pura como aplicada. Ellas podrían ser usadas por los matemáticos puros para definir funciones como una aproximación fundamental a la teoría de funciones, tanto como para calcular valores precisos de constantes y funciones trascendentales. En matemática, en ciencias y en ingeniería las series infinitas son ubicuas, es por ello que aparecen en la evaluación de integrales, en la solución de ecuaciones diferenciales, en series de Fourier y compite con las representaciones integral para la descripción de funciones especiales. Más adelante veremos la solución en series de Neumann para ecuaciones integrales dan un ejemplo más de la ocurrencia y uso de las series infinitas.

Encaramos el problema que significa la suma de un número infinito de términos. La aproximación usual es por sumas parciales. Si tenemos una sucesión de términos infinitos $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, \dots$, definimos la suma parcial i -ésima como

$$s_i = \sum_{n=1}^i u_n , \quad (1.1)$$

Esta es una suma finita y no ofrece dificultades. Si las sumas parciales s_i convergen a un límite (finito) cuando $i \rightarrow \infty$,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} s_i = S , \quad (1.2)$$

La serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ se dice que es convergente y tiene el valor S . Note cuidadosamente que nosotros razonablemente y plausiblemente, pero aún arbitrariamente *definimos* que la serie infinita es igual a S . Podemos notar que una condición necesaria para esta convergencia a un límite es que el $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$. Esta condición, sin embargo, no es suficiente para garantizar la convergencia. La ecuación (1.2) usualmente está escrita en notación matemática formal:

¹Este capítulo está basado en el quinto capítulo del libro: *Mathematical Methods for Physicists, fourth edition* de George B. Arfken & Hans J. Weber, editorial ACADEMIC PRESS.

La condición para la existencia de un límite S es que para cada $\varepsilon > 0$, haya un N fijo tal que

$$|S - s_i| < \varepsilon, \quad \text{para todo } i > N.$$

Esta condición a menudo derivada del *criterio de Cauchy* aplicado a las sumas parciales s_i . El criterio de Cauchy es:

Una condición necesaria y suficiente para que una sucesión (s_i) converja es que para cada $\varepsilon > 0$ exista un número fijo N tal que

$$|s_j - s_i| < \varepsilon \quad \text{para todos los } i, j > N.$$

Esto significa que la sumas parciales individuales deben mantenerse cercanas cuando nos movemos lejos en la secuencia.

El criterio de Cauchy puede fácilmente extenderse a sucesiones de funciones. La vemos en esta forma en la sección 1.5 en la definición de convergencia uniforme y más adelante en el desarrollo del espacio de Hilbert.

Nuestras sumas parciales s_i pueden no converger a un límite simple sino que podría oscilar, como en el caso

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots + (-1)^n - \dots .$$

Claramente, $s_i = 1$ para i impar pero 0 para i par. No hay convergencia a un límite, y series tal como estas son llamadas oscilantes.

Para las series

$$1 + 2 + 3 + \dots + n + \dots$$

tenemos

$$s_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Cuando $n \rightarrow \infty$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty .$$

Cada vez que las sumas parciales diverjan (tienden a $\pm\infty$), la serie infinita se dice que *diverge*. A menudo el término divergente es extendido para incluir series oscilatorias.

Ya que evaluamos las sumas parciales por aritmética ordinaria, la serie convergente, definida en términos del límite de las sumas parciales, asume una posición de importancia suprema. Dos ejemplos pueden clarificar la naturaleza de convergencia o divergencia de una serie y servirá como una base para una investigación más detallada en la próxima sección.

Ejemplo Series geométricas.

La sucesión geométrica, comenzando con a y con una razón r ($r \geq 0$), está dado por

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1} + \dots .$$

La suma parcial n -ésima está dada por

$$s_n = a \frac{1 - r^n}{1 - r} \quad (1.3)$$

Tomando el límite cuando $n \rightarrow \infty$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{a}{1 - r}, \quad \text{para } r < 1. \quad (1.4)$$

De modo que, por definición, la serie geométrica infinita converge para $r < 1$ y está dada por

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1 - r}. \quad (1.5)$$

Por otra parte, si $r \geq 1$, la condición necesaria $u_n \rightarrow 0$ no se satisface y la serie infinita diverge.

Ejemplo Series armónicas.

Consideremos la serie armónica

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots. \quad (1.6)$$

Tenemos que el $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1/n = 0$, pero esto no es suficiente para garantizar la convergencia. Si agrupamos los términos (no cambiando el orden) como

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \right) + \left(\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16} \right) + \cdots, \quad (1.7)$$

se verá que cada par de paréntesis encierra p términos de la forma

$$\frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+2} + \cdots + \frac{1}{p+p} > \frac{p}{2p} = \frac{1}{2}. \quad (1.8)$$

Formando sumas parciales sumando un grupos entre paréntesis por vez, obtenemos

$$\begin{aligned} s_1 &= 1, & s_4 &> \frac{5}{2}, \\ s_2 &= \frac{3}{2}, & s_5 &> \frac{6}{2}, \\ s_3 &> \frac{4}{2}, & s_n &> \frac{n+1}{2}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Las series armónicas consideradas de esta manera ciertamente son divergentes. Una demostración independiente y alternativa de su divergencia aparece en la sección 1.2.

Usando el teorema del binomio, podríamos expandir la función $(1+x)^{-1}$:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-x)^{n-1} + \cdots. \quad (1.10)$$

Si tomamos $x \rightarrow 1$, la serie se convierte

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots, \quad (1.11)$$

una serie que etiquetamos como oscilatoria anteriormente. Aunque no converge en el sentido usual, significa que puede ser ligada a su serie. Euler, por ejemplo, asignado un valor de $1/2$ a esta sucesión oscilatoria sobre la base de la correspondencia entre esta serie y la bien definida función $(1+x)^{-1}$. Desafortunadamente, tal correspondencia entre la serie y la función no es única y esta aproximación deberá ser redefinida. Otros métodos de asignar un significado a una serie oscilatoria o divergente, métodos de definir una suma, han sido desarrollados. Otro ejemplo de generalizar la convergencia lo vemos en las serie asintótica o semi-convergente, consideradas más adelante.

1.2. Pruebas de Convergencia

Aunque las series no convergentes pueden ser útiles en ciertos casos especiales, usualmente insistimos, como una materia de conveniencia si no de necesidad, que nuestras series sean convergentes. Por lo tanto esto llega a ser una materia de extrema importancia para ser capaz de decir si una serie dada es o no convergente. Desarrollaremos un número de posibles pruebas, comenzando con una prueba simple pero poco sensible y posteriormente trabajar con una más complicada pero muy sensible.

Por ahora consideremos una serie de términos positivos, $a_n > 0$, posponiendo los términos negativos hasta la próxima sección.

1.2.1. Pruebas de comparación.

Si término a término una serie de términos $u_n \leq a_n$, en el cual los a_n forman una serie convergente, las series $\sum_n u_n$ también es convergente. Simbólicamente, tenemos

$$\begin{aligned} \sum_n a_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \dots, \quad \text{convergente,} \\ \sum_n u_n &= u_1 + u_2 + u_3 + \dots. \end{aligned}$$

Si $u_n \leq a_n$ para todo n , luego $\sum_n u_n \leq \sum_n a_n$ y $\sum_n u_n$ por lo tanto es convergente.

Si término a término es una serie de términos $v_n \geq b_n$, en el cual b_n forma una serie divergente, las series $\sum_n v_n$ también es divergente. Note que las comparaciones de u_n con b_n o v_n con a_n no dan información. Aquí tenemos

$$\begin{aligned} \sum_n b_n &= b_1 + b_2 + b_3 + \dots, \quad \text{divergente,} \\ \sum_n v_n &= v_1 + v_2 + v_3 + \dots. \end{aligned}$$

Si $v_n \geq b_n$ para todo n , luego $\sum_n v_n \geq \sum_n b_n$ y $\sum_n v_n$ por lo tanto es divergente.

Para las series convergente a_n tenemos las series geométricas, mientras las series armónicas servirán como las series divergentes b_n . En tanto otras series son identificadas como convergentes o divergentes, ellas pueden ser usadas como las series conocidas en estas pruebas de comparación.

Todos las pruebas desarrolladas en esta sección son esencialmente pruebas de comparación. La figura 1.1 muestra estas pruebas y sus relaciones.

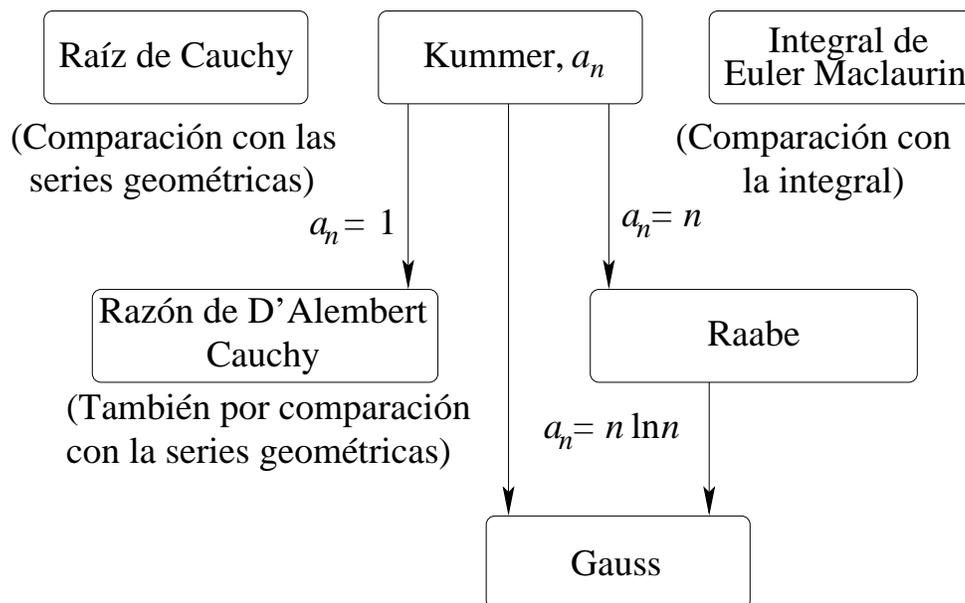


Figura 1.1: Prueba de comparación.

Ejemplo Las series p .

Probamos $\sum_n n^{-p}$, $p = 0.999$, por convergencia. Ya que $n^{-0.999} > n^{-1}$, y $b_n = n^{-1}$ forman la serie armónica divergente, la prueba de comparación muestra que $\sum_n n^{-0.999}$ es divergente. Generalizando, $\sum_n n^{-p}$ se ve como divergente para todo $p \leq 1$.

1.2.2. Prueba de la raíz de Cauchy.

Si $(a_n)^{1/n} \leq r < 1$ para todo n suficientemente grande, con r independiente de n , entonces $\sum_n a_n$ es convergente. Si $(a_n)^{1/n} \geq 1$ para todo n suficientemente grande, entonces $\sum_n a_n$ es divergente.

La primera parte de esta prueba se verifica fácilmente elevando $(a_n)^{1/n} \leq r$ a la n -ésima potencia. Obtenemos

$$a_n \leq r^n < 1 .$$

Ya que r^n es sólo el término n -ésimo en una serie geométrica convergente, $\sum_n a_n$ es convergente por la prueba de comparación. Conversamente, si $(a_n)^{1/n} \geq 1$, entonces $a_n \geq 1$ y la serie debería diverger. La prueba de la raíz es particularmente útil en establecer las propiedades de la serie de potencias.

1.2.3. Prueba de la razón de D' Alembert o Cauchy.

Si $a_{n+1}/a_n \leq r < 1$ para todo n suficientemente grande, y r independiente de n , entonces $\sum_n a_n$ es convergente. Si $a_{n+1}/a_n \geq 1$ de un n en adelante, entonces $\sum_n a_n$ es divergente.

La convergencia está dada por la comparación directa con las series geométricas ($1 + r + r^2 + \dots$). En la segunda parte $a_{n+1} \geq a_n$ y la divergencia debe ser razonablemente obvia. Aunque la prueba no es tan sensible como la prueba de la raíz de Cauchy, esta prueba de la razón e D' Alembert es una de las más fáciles de aplicar y es ampliamente usada. Una afirmación alternativa de la prueba de la razón está en la forma de un límite: si

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1, & \quad \text{convergencia} \\ & > 1, \quad \text{divergencia} \\ & = 1, \quad \text{indeterminado.} \end{aligned} \tag{1.12}$$

A causa de la posibilidad de ser indeterminado, la prueba de la razón es probable que falle en puntos cruciales, y se hace necesario una prueba más delicada y sensible.

Podríamos preguntarnos cómo podría levantarse esta indeterminación. Realmente fue disimulado en el primera afirmación $a_{n+1}/a_n \leq r < 1$. Podríamos encontrar $a_{n+1}/a_n < 1$ para todo n finito pero ser inapropiado escoger un $r < 1$ e *independiente* de n tal que $a_{n+1}/a_n \leq r$ para todo n suficientemente grande. Un ejemplo está dado por las series armónicas

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} < 1, \tag{1.13}$$

Ya que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1, \tag{1.14}$$

no existe una razón fija $r < 1$ y la prueba de la razón falla.

Ejemplo Prueba de la razón de D' Alembert.

Probar la convergencia de $\sum_n \frac{n}{2^n}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)/2^{n+1}}{n/2^n} = \frac{1}{2} \frac{n+1}{n}. \tag{1.15}$$

Ya que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{3}{4} \quad \text{para } n \geq 2, \tag{1.16}$$

tenemos convergencia. Alternativamente,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}, \tag{1.17}$$

y de nuevo converge.

1.2.4. Prueba integral de Cauchy o Maclaurin.

Esta es otra clase de prueba de comparación en la cual comparamos una serie con una integral. Geométricamente, comparamos el área de una serie de un rectángulo de ancho unitario con el área bajo la curva.

Sea $f(x)$ una función continua, monótonamente decreciente en la cual $f(n) = a_n$. Luego $\sum_n a_n$ converge si $\int_0^\infty f(x) dx$ es finita y diverge si la integral es infinita. Para la i -ésima suma parcial

$$s_i = \sum_{n=1}^i a_n = \sum_{n=1}^i f(n) . \quad (1.18)$$

Pero

$$s_i > \int_1^{i+1} f(x) dx , \quad (1.19)$$

por la figura 1.2a, $f(x)$ es monótonamente decreciente. Por otra parte, de la figura 1.2b,

$$s_i - a_1 < \int_1^i f(x) dx , \quad (1.20)$$

en la cual la serie está representada por los rectángulos inscritos. Tomando el límite como $i \rightarrow \infty$, tenemos

$$\int_1^\infty f(x) dx < \sum_{n=1}^\infty a_n < \int_1^\infty f(x) dx + a_1 . \quad (1.21)$$

De modo que la serie infinita converge o diverge cuando la integral correspondiente converge o diverge respectivamente.

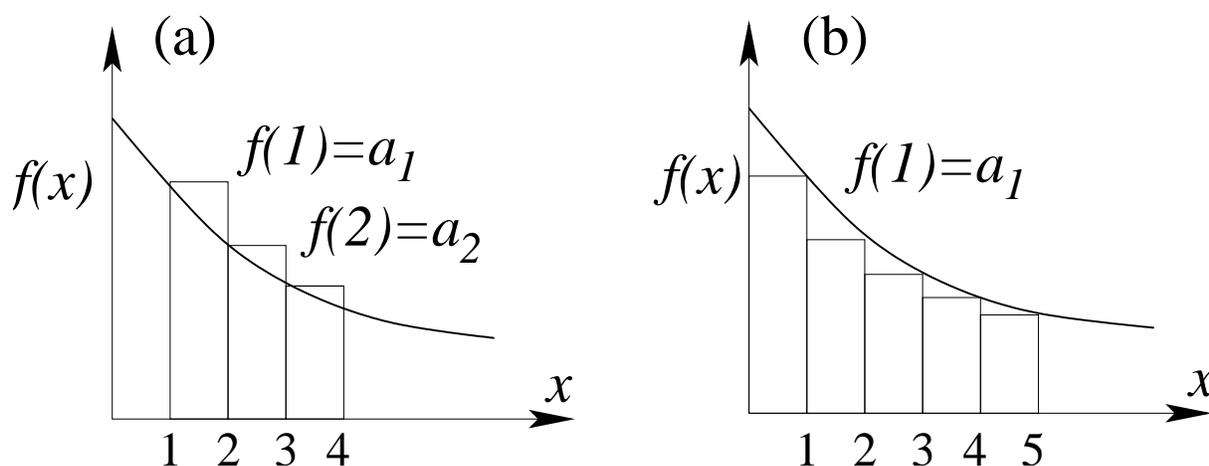


Figura 1.2: (a) Comparación de la integral y la suma de bloques sobresalientes. (b) Comparación de la integral y la suma de bloques envueltos.

La prueba de la integral es particularmente útil para acotar superior e inferiormente el resto de una serie, después de que algunos números de términos iniciales hayan sido sumados.

Esto es,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^N a_n + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n ,$$

donde

$$\int_{N+1}^{\infty} f(x) dx < \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n < \int_{N+1}^{\infty} f(x) dx + a_{N+1} .$$

Podemos liberar la prueba de la integral de los requerimientos muy restrictivos de que la función de interpolación $f(x)$ sea positiva y monótonamente decreciente, basta que la función $f(x)$ tenga una derivada continua que satisfaga

$$\sum_{n=N_i+1}^{N_f} f(n) = \int_{N_i}^{N_f} f(x) dx + \int_{N_i}^{N_f} (x - [x])f'(x) dx . \quad (1.22)$$

Aquí $[x]$ denota el entero mayor por debajo de x , tal que $x - [x]$ varía como diente de sierra entre 0 y 1.

Ejemplo Función Zeta de Riemann.

La función zeta de Riemann está definida por

$$\zeta(p) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-p} . \quad (1.23)$$

Podemos tomar $f(x) = x^{-p}$ y entonces

$$\int_1^{\infty} x^{-p} dx = \begin{cases} \left. \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right|_1^{\infty} , & p \neq 1 \\ \ln x \Big|_1^{\infty} , & p = 1 \end{cases} \quad (1.24)$$

La integral y por lo tanto la serie son divergentes para $p \leq 1$ y convergente para $p > 1$. De modo que la ecuación (1.23) lleva la condición de $p > 1$. Esto, incidentalmente, es una prueba independiente de que la serie armónica ($p = 1$) diverge y lo hace en forma logarítmica. La suma del primer millón de términos $\sum_{n=1}^{1,000,000} n^{-1}$, es solamente 14.392726....

Esta comparación con la integral también puede ser usada para dar una cota superior a la constante Euler-Mascheroni definida por

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{m=1}^n \frac{1}{m} - \ln n \right) . \quad (1.25)$$

Volviendo a las sumas parciales,

$$s_n = \sum_{m=1}^n m^{-1} - \ln n < \int_1^n \frac{dx}{x} - \ln n + 1 . \quad (1.26)$$

Evaluando la integral del lado derecho, $s_n < 1$ para todo n y por lo tanto $\gamma < 1$. Realmente la constante de Euler-Mascheroni es 0.57721566....

1.2.5. Prueba de Kummer.

Esta es la primera de tres pruebas que son algo más difíciles para aplicar que las anteriores. Su importancia radica en su poder y sensibilidad. Frecuentemente, al menos una de las tres funcionará cuando las pruebas más fáciles sean indeterminadas. Debe recordarse, sin embargo, que estas pruebas, como aquellas previamente discutidas, están finalmente basadas en comparaciones. Esto significa que todas las pruebas de convergencia dadas aquí, incluyendo la de Kummer, puedan fallar algunas veces.

Consideremos una serie de términos positivos u_i y una sucesión de constantes positivas finitas a_i . Si

$$a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} \geq C > 0, \quad (1.27)$$

para todo $n \geq N$, algún número fijo, entonces $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ converge. Si

$$a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} \leq 0 \quad (1.28)$$

y $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^{-1}$ diverge, luego $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ diverge.

La prueba de este poderoso test es simple y queda como ejercicio.

Si las constantes positivas a_n de la prueba de Kummer son elegidas como $a_n = n$, tenemos la prueba de Raabe.

1.2.6. Prueba de Raabe.

Si $u_n > 0$ y si

$$n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) \geq P > 1, \quad (1.29)$$

para todo $n \geq N$, donde N es un entero positivo independiente de n , entonces $\sum_i u_i$ converge. Si

$$n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) \leq 1, \quad (1.30)$$

entonces $\sum_i u_i$ diverge ($\sum n^{-1}$ diverge).

La forma en límite en el test de Raabe es

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) = P. \quad (1.31)$$

Tenemos convergencia para $P > 1$, y divergencia para $P < 1$, y no hay prueba para $P = 1$ exactamente como con el test de Kummer. Esta indeterminancia está expresada en que podemos encontrar ejemplos de una serie convergente y una divergente en que ambas series tienden a $P = 1$ en la ecuación (1.31).

El test de Raabe es más sensible que la prueba de la razón de D'Alembert ya que $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}$ diverge más lentamente que $\sum_{n=1}^{\infty} 1$. Obtenemos una prueba aún más sensible (y una relativamente fácil de aplicar) si escogemos $a_n = n \ln n$. Esto es la prueba de Gauss.

1.2.7. Prueba de Gauss.

Si $u_n > 0$ para todo n finito y

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = 1 + \frac{h}{n} + \frac{B(n)}{n^2}, \quad (1.32)$$

en el cual $B(n)$ es una función acotada de n para $n \rightarrow \infty$, luego $\sum_i u_i$ converge para $h > 1$ y diverge para $h \leq 1$.

La razón u_n/u_{n+1} de la ecuación (1.32) a menudo llega a ser como la razón de dos formas cuadráticas:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{n^2 + a_1 n + a_0}{n^2 + b_1 n + b_0}. \quad (1.33)$$

Se puede mostrar que tenemos convergencia para $a_1 > b_1 + 1$ y divergencia para $a_1 \leq b_1 + 1$.

El test de Gauss es un test extremadamente sensible para la convergencia de series. Esto funcionará para prácticamente todas las series que encontraremos en Física. Para $h > 1$ o $h < 1$ la prueba se deduce directamente del test de Raabe

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[1 + \frac{h}{n} + \frac{B(n)}{n^2} - 1 \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[h + \frac{B(n)}{n} \right] = h. \quad (1.34)$$

Si $h = 1$, falla el test de Raabe. Sin embargo, si volvemos al test de Kummer y usamos $a_n = n \ln n$, tenemos

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ n \ln n \left[1 + \frac{1}{n} + \frac{B(n)}{n^2} \right] - (n+1) \ln(n+1) \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[n \ln n \cdot \frac{(n+1)}{n} - (n+1) \ln(n+1) \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) \left[\ln n - \ln n - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right]. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Pidiendo prestado un resultado de la sección 1.6 (el cual no es dependiente de la prueba de Gauss) tenemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} -(n+1) \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} -(n+1) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} \dots \right) = -1 < 0. \quad (1.36)$$

De modo que tenemos divergencia para $h = 1$. Esto es un ejemplo de una aplicación exitosa del test de Kummer en el cual el test de Raabe falla.

Ejemplo Series de Legendre.

La relación de recurrencia para la solución en serie de la ecuación de Legendre pueden ser colocadas en la forma

$$\frac{a_{2j+2}}{a_{2j}} = \frac{2j(2j+1) - l(l+1)}{(2j+1)(2j+2)}. \quad (1.37)$$

Esto es equivalente a u_{2j+2}/u_{2j} para $x = +1$. Para $j \gg l$

$$\frac{a_{2j}}{a_{2j+2}} \rightarrow \frac{(2j+1)(2j+2)}{2j(2j+1)} = \frac{2j+2}{2j} = 1 + \frac{1}{j}. \quad (1.38)$$

Por la ecuación (1.33) la serie es divergente. Más adelante exigiremos que las series de Legendre sean finitas (se corten) para $x = 1$. Eliminaremos la divergencia ajustando los parámetros $n = 2j_0$, un entero par. Esto truncará la serie, convirtiendo la serie infinita en un polinomio.

1.2.8. Mejoramiento de convergencia.

En esta sección no nos preocupará establecer la convergencia como una propiedad matemática abstracta. En la práctica, la razón de convergencia puede ser de considerable importancia. Aquí presentamos un método que mejora la razón de la convergencia de una serie ya convergente.

El principio básico de este método, debido a Kummer, es formar una combinación lineal de nuestra serie lentamente convergente y una o más series cuya suma es conocida. Entre las series conocidas, la colección

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1, \\ \alpha_2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}, \\ \alpha_3 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{1}{18}, \\ &\vdots \\ \alpha_p &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)\cdots(n+p)} = \frac{1}{p \cdot p!},\end{aligned}$$

es particularmente útil. Las series están combinadas término a término y los coeficientes en combinación lineal son escogidos para cancelar los términos que convergen lentamente.

Ejemplo Función zeta de Riemann, $\zeta(3)$.

Sea la serie a ser sumada $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-3}$. En la sección 1.10 está identificada como una función zeta de Riemann, $\zeta(3)$. Formamos una combinación lineal

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-3} + a_2 \alpha_2 = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-3} + \frac{a_2}{4}.$$

α_1 no está incluida ya que converge más lentamente que $\zeta(3)$. Combinando términos, obtenemos sobre la mano izquierda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n^3} + \frac{a_2}{n(n+1)(n+2)} \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2(1+a_2) + 3n+2}{n^3(n+1)(n+2)}.$$

Si escogemos $a_2 = -1$, la ecuación precedente tiende a

$$\zeta(3) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-3} = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+2}{n^3(n+1)(n+2)}. \quad (1.39)$$

La serie resultante no es muy bonita pero converge como n^{-4} , apreciablemente más rápido que n^{-3} .

El método puede ser extendido incluyendo $a_3\alpha_3$ para obtener la convergencia como n^{-5} , $a_4\alpha_4$ para obtener la convergencia como n^{-6} , etc. Eventualmente, usted tiene que alcanzar un compromiso entre cuánta álgebra usted hace y cuánta aritmética la computadora hace. Como las computadoras lo hacen más rápido, el balance está seguramente sustituyendo menos álgebra hecha por usted, por más aritmética realizada por el computador.

1.3. Series alternadas.

En la sección 1.2 nos limitamos a series de términos positivos. Ahora, en contraste, consideraremos series infinitas en las cuales los signos se alternan. La cancelación parcial debida a la alternancia de los signos hace la convergencia más rápida y mucho más fácil de identificar. Probaremos que el criterio de Leibniz es una condición general para la convergencia de una serie alternada.

1.3.1. Criterio de Leibniz.

Consideremos la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ con $a_n > 0$. Si a_n es monótonamente decreciente (para N suficientemente grande) y el $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, entonces la serie converge.

Para probar esto, examinemos las sumas parciales pares

$$\begin{aligned} s_{2n} &= a_1 - a_2 + a_3 - \dots - a_{2n} , \\ s_{2n+2} &= s_{2n} + (a_{2n+1} - a_{2n+2}) . \end{aligned} \tag{1.40}$$

Ya que $a_{2n+1} > a_{2n+2}$, tenemos

$$s_{2n+2} > s_{2n} . \tag{1.41}$$

Por otra parte,

$$s_{2n+2} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \dots - a_{2n+2} . \tag{1.42}$$

De modo que, con cada par de términos $a_{2p} - a_{2p+1} > 0$,

$$s_{2n+2} < a_1 . \tag{1.43}$$

Con las sumas parciales pares acotamos $s_{2n} < s_{2n+2} < a_1$ y los términos a_n decrecen monótonamente aproximándose a cero, esta serie alternada converge.

Un resultado más importante puede ser extraído de las sumas parciales. A partir de las diferencias entre el límite de la serie S y las sumas parciales s_n

$$\begin{aligned} S - s_n &= a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - a_{n+4} + \dots \\ &= a_{n+1} - (a_{n+2} - a_{n+3}) - (a_{n+4} - a_{n+5}) - \dots \end{aligned} \tag{1.44}$$

o

$$S - s_n < a_{n+1} . \tag{1.45}$$

La ecuación (1.45) dice que el error en el corte de una serie alternada después de n términos es menor que a_{n+1} , el primer término excluido. Un conocimiento del error obtenido de esta manera puede ser de gran importancia práctica.

1.3.2. Convergencia absoluta.

Dada una serie en términos de u_n en la cual u_n puede variar en signo, si $\sum |u_n|$ converge, entonces $\sum u_n$ se dice que es *absolutamente convergente*. Si $\sum u_n$ converge pero $\sum |u_n|$ diverge, la convergencia recibe el nombre de *condicional*.

La serie alternada armónica es un ejemplo simple de esta convergencia condicionada. Tenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^{-1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} - \cdots \quad (1.46)$$

convergente por el criterio de Leibniz, pero

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

se ha demostrado que es divergente en la sección 1.1 y 1.2.

Podemos notar que todas las pruebas desarrolladas en la sección 1.2 supone una serie de términos positivos. Por lo tanto, todas las pruebas en esa sección garantizan la convergencia absoluta.

Ejemplo

Para $0 < x < \pi$ la serie de Fourier

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n} = -\ln \left(2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \right) , \quad (1.47)$$

converge teniendo coeficientes que cambian de signo frecuentemente, pero no tanto para que el criterio de convergencia de Leibniz se aplique fácilmente. Apliquemos el test de la integral de la ecuación (1.22). Usando integración por partes vemos de inmediato que

$$\int_1^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n} dn = \left[\frac{\operatorname{sen}(nx)}{nx} \right]_1^{\infty} - \frac{1}{x} \int_1^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^2} dn$$

converge para $n \rightarrow \infty$, y la integral del lado derecho incluso converge absolutamente. El término derivado en la ecuación (1.22) tiene la forma

$$\int_1^{\infty} (n - [n]) \left\{ -\frac{x}{n} \operatorname{sen}(nx) - \frac{\cos(nx)}{n^2} \right\} dn ,$$

donde el segundo término converge absolutamente y no necesita ser considerado. Lo próximo es observar que $g(N) = \int_1^N (n - [n]) \operatorname{sen}(nx) dn$ es acotado para $N \rightarrow \infty$, tal como $\int_1^N \operatorname{sen}(nx) dn$ es acotado debido a la naturaleza periódica de $\operatorname{sen}(nx)$ y a su regular cambio de signo. Usando integración por partes nuevamente

$$\int_1^{\infty} \frac{g'(n)}{n} dn = \left[\frac{g(n)}{n} \right]_1^{\infty} + \int_1^{\infty} \frac{g(n)}{n^2} dn ,$$

vemos que el segundo término es absolutamente convergente, y el primero va a cero en el límite superior. Por lo tanto la serie en la ecuación (1.47) converge, lo cual es duro de ver usando otro test de convergencia.

1.4. Álgebra de series.

Establecer la convergencia absoluta es importante porque puede probarse que las series absolutamente convergentes pueden ser manipuladas de acuerdo a las reglas familiares del álgebra o aritmética.

1. Si una serie infinita es absolutamente convergente, la suma de la serie es independiente del orden en el cual los términos son añadidos.
2. La serie puede ser multiplicada por otra serie absolutamente convergente. El límite del producto será el producto de los límites de las series individuales. El producto de las series, una doble serie, también será absolutamente convergente.

No hay tales garantías en series condicionalmente convergentes. Nuevamente consideremos la serie armónica alternada. Si escribimos

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) - \dots, \quad (1.48)$$

es claro que la suma

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^{-1} < 1. \quad (1.49)$$

Sin embargo, si rearrreglamos los términos sutilmente, podemos hacer que la serie armónica alternada converja a $3/2$. Reagrupamos los términos de la ecuación (1.48), tomando

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15}\right) - \frac{1}{4} \\ & + \left(\frac{1}{17} + \dots + \frac{1}{25}\right) - \frac{1}{6} + \left(\frac{1}{27} + \dots + \frac{1}{35}\right) - \frac{1}{8} + \dots. \end{aligned} \quad (1.50)$$

Tratando los términos agrupados en paréntesis como términos simples por conveniencia, obtenemos las sumas parciales

$$\begin{array}{ll} s_1 = 1.5333 & s_2 = 1.0333 \\ s_3 = 1.5218 & s_4 = 1.2718 \\ s_5 = 1.5143 & s_6 = 1.3476 \\ s_7 = 1.5103 & s_8 = 1.3853 \\ s_9 = 1.5078 & s_{10} = 1.4078 \end{array}$$

A partir de esta tabulación de los s_n y el gráfico de s_n versus n en la figura 1.3 es clara la convergencia a $3/2$. Hemos rearrreglado los términos, tomando términos positivos hasta que la suma parcial sea igual o mayor que $3/2$, luego sumando los términos negativos hasta que la suma parcial caiga bajo $3/2$, etc. Como las series se extienden hasta infinito, todos los términos originales eventualmente aparecerán, pero las sumas parciales de este reordenamiento de esta serie armónica alternada converge a $3/2$. Por un reordenamiento de términos una serie condicionalmente convergente podría ser hecha para converger a algún valor deseado o para que diverja. Esta afirmación es dada como el teorema de Riemann. Obviamente, series condicionalmente convergentes deberían ser tratadas con precaución.

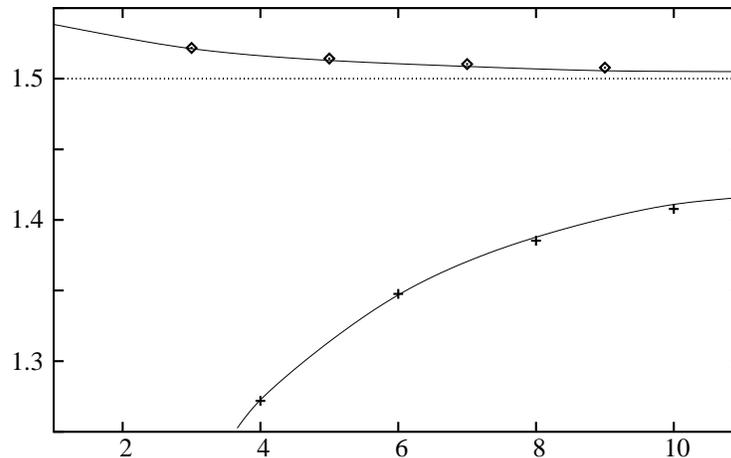


Figura 1.3: Serie armónica alternada, rearrreglo de términos para dar convergencia a 1.5.

1.4.1. Mejoramiento de la convergencia, aproximaciones racionales.

La serie

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \quad -1 < x \leq 1, \quad (1.51)$$

converge muy suavemente cuando x se aproxima a $+1$. La razón de convergencia podría ser mejorada sustancialmente multiplicando ambos lados de la ecuación (1.51) por un polinomio y ajustando los coeficientes del polinomio para cancelar las porciones que convergen más lentamente en la serie. Consideremos la posibilidad más simple: Multiplicar $\ln(1+x)$ por $1+a_1x$.

$$(1+a_1x)\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + a_1 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{n+1}}{n}.$$

Combinando las dos series sobre la derecha término a término, obtenemos

$$\begin{aligned} (1+a_1x)\ln(1+x) &= x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{n} - \frac{a_1}{n-1} \right) x^n \\ &= x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n(1-a_1) - 1}{n(n-1)} x^n. \end{aligned}$$

Claramente, si tomamos $a_1 = 1$, el n en el numerador desaparece y nuestra serie combinada converge como n^{-2} .

Continuando este proceso, encontramos que $(1+2x+x^2)\ln(1+x)$ se anula como n^{-3} , $(1+3x+3x^2+x^3)\ln(1+x)$ se anula cuando n^{-4} . En efecto estamos desplazándonos desde una expansión de serie simple de la ecuación (1.51) a una representación racional en la cual

la función $\ln(1+x)$ está representada por la razón de una serie y un polinomio:

$$\ln(1+x) = \frac{x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n(n-1)}}{1+x}.$$

Tales aproximaciones racionales pueden ser ambas compactas y precisas. Los programas computacionales hacen extensivo el uso de ellas.

1.4.2. Reordenamiento de series dobles.

Otro aspecto del reordenamiento de series aparece en el tratamiento de series dobles (figura 1.4):

	$m=0$	1	2	3
$n=0$	a_{00}	a_{01}	a_{02}	a_{03}
1	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}
2	a_{20}	a_{21}	a_{22}	a_{23}
3	a_{30}	a_{31}	a_{32}	a_{33}

Figura 1.4: Series dobles, la suma sobre n es indicada por líneas segmentadas verticales.

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,m}.$$

sustituyamos

$$\begin{aligned} n &= q \geq 0, \\ m &= p - q \geq 0, \\ (q &\leq p). \end{aligned}$$

Esto resulta en la identidad

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,m} = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^p a_{q,p-q}. \quad (1.52)$$

La suma sobre p y q de la ecuación (1.52) está ilustrada en la figura 1.5. La sustitución

$$n = s \geq 0, \quad m = r - 2s \geq 0, \quad \left(s \leq \frac{r}{2} \right)$$

	$p=$	0	1	2	3
$q=$		a_{00}	a_{01}	a_{02}	a_{03}
			⋮	⋮	⋮
1			a_{10}	a_{11}	a_{12}
				⋮	⋮
2				a_{20}	a_{21}
					⋮
3					a_{30}

Figura 1.5: Series dobles nuevamente, la primera suma es representada por líneas segmentadas verticales pero estas líneas verticales corresponden a las diagonales en la figura 1.4.

tiende a

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,m} = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{[r/2]} a_{s,r-2s} . \tag{1.53}$$

con $[r/2] = r/2$ para r par, $(r - 1)/2$ para r impar. La suma sobre r y s de la ecuación (1.53) está mostrada en la figura 1.6. Las ecuaciones (1.52) y (1.53) son claramente reordenamientos del arreglo de coeficientes $a_{n,m}$, reordenamientos que son válidos en tanto tengamos convergencia absoluta. La combinación de las ecuaciones (1.52) y (1.53),

	$r=$	0	1	2	3	4
$s=$		a_{00}	a_{01}	a_{02}	a_{03}	a_{04}
				⋮	⋮	⋮
1			a_{10}	a_{11}	a_{12}	
						⋮
2						a_{20}

Figura 1.6: Series dobles. La suma sobre s corresponde a la suma a lo largo de la líneas segmentadas inclinadas, en la figura 1.4.

$$\sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^p a_{q,p-q} = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{[r/2]} a_{s,r-2s} . \tag{1.54}$$

es usada en la determinación de la forma en serie de los polinomios de Legendre.

1.5. Series de funciones.

Extendemos nuestro concepto de series infinitas para incluir la posibilidad que cada término u_n pueda ser una función de alguna variable, $u_n = u_n(x)$. Numerosas ilustraciones de tales series de funciones aparecerán más adelante. Las sumas parciales llegan a ser funciones de la variable x

$$s_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) , \quad (1.55)$$

tal como lo hacemos para la suma de serie, definimos el límite como el límite de las sumas parciales

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) . \quad (1.56)$$

Hasta ahora nos hemos ocupado del comportamiento de las sumas parciales como una función de n . Ahora consideremos cómo las cantidades anteriores dependen de x . Aquí el concepto clave es la convergencia uniforme.

1.5.1. Convergencia uniforme.

Si para cualquier $\varepsilon > 0$ pequeño, existe un número N , independiente de x en el intervalo $[a, b]$ con $(a \leq x \leq b)$ tal que

$$|S(x) - s_n(x)| < \varepsilon , \forall n \geq N , \quad (1.57)$$

se dice que la serie converge uniformemente en el intervalo $[a, b]$. Esto dice que para que nuestra serie sea uniformemente convergente, debe ser posible encontrar un N finito tal que la cola de la serie infinita, $|\sum_{i=N+1}^{\infty} u_i(x)|$, sea menor que un ε arbitrariamente pequeño para todo x en el intervalo dado.

Esta condición, ecuación (1.57), la cual define la convergencia uniforme, es ilustrada en la figura 1.7. El punto es que no importa cuán pequeño sea ε podemos siempre tomar un n suficientemente grande tal que la magnitud absoluta de la diferencia entre $S(x)$ y $s_n(x)$ sea menor que ε para todo x , $a \leq x \leq b$. Si esto no puede ser hecho, entonces $\sum u_n(x)$ no es uniformemente convergente en el intervalo $[a, b]$.

Ejemplo

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{[(n-1)x+1][nx+1]} . \quad (1.58)$$

La suma parcial $s_n(x) = nx(nx+1)^{-1}$ puede ser verificada por inducción matemática. Por inspección esta expresión para $s_n(x)$ es válida para $n = 1, 2$. Suponemos que se mantiene

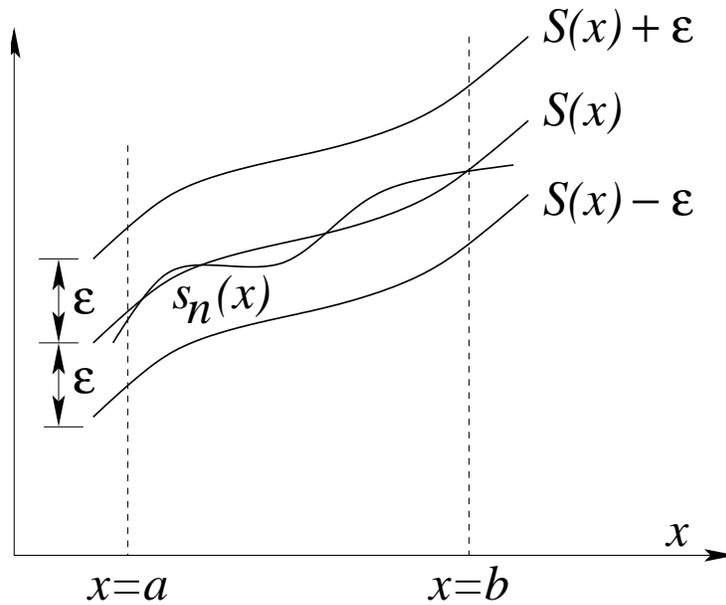


Figura 1.7: Convergencia uniforme.

para el término n y probamos para $n + 1$.

$$\begin{aligned}
 s_{n+1} &= s_n + \frac{x}{[nx + 1][(n + 1)x + 1]} \\
 &= \frac{nx}{[nx + 1]} + \frac{x}{[nx + 1][(n + 1)x + 1]} \\
 &= \frac{(n + 1)x}{(n + 1)x + 1},
 \end{aligned}$$

completando la prueba.

Tomando $n \rightarrow \infty$ tenemos

$$\begin{aligned}
 S(0) &= \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(0) = 0, \\
 S(x \neq 0) &= \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x \neq 0) = 1.
 \end{aligned}$$

Tenemos una discontinuidad en el límite de la serie en $x = 0$. Sin embargo, $s_n(x)$ es una función continua de x , en el intervalo $0 \leq x < 1$, para todo n finito. La ecuación (1.57) con ε suficientemente pequeño, será violado para todo n finito. Nuestra serie no converge uniformemente.

1.5.2. Prueba M de Weierstrass.

La prueba más comúnmente usada para la convergencia uniforme es la prueba M de Weierstrass. Si podemos construir una serie de números $\sum_1^\infty M_i$, en la cual $M_i \geq |u_i(x)|$ para todo x en el intervalo $[a, b]$ y $\sum_1^\infty M_i$ es convergente, nuestra serie $\sum_1^\infty u_i(x)$ será *uniformemente* convergente en $[a, b]$.

La prueba de este test M de Weierstrass es directa y simple. Ya que $\sum_i M_i$ converge, existen algunos números N tal que $n + 1 \geq N$,

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} M_i < \varepsilon . \quad (1.59)$$

Esto a partir de nuestra definición de convergencia. Entonces, con $|u_i(x)| \leq M_i$ para todo x en el intervalo $a \leq x \leq b$,

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} |u_i(x)| < \varepsilon . \quad (1.60)$$

De modo que

$$|S(x) - s_n(x)| = \left| \sum_{i=n+1}^{\infty} u_i(x) \right| < \varepsilon , \quad (1.61)$$

y por definición $\sum_1^{\infty} u_i(x)$ es uniformemente convergente en $[a, b]$. Ya que tenemos especificados valores absolutos en el planteamiento de la prueba M de Weierstrass, la serie $\sum_1^{\infty} u_i(x)$ también es vista como serie *absolutamente* convergente.

Podemos notar que la convergencia uniforme y convergencia absoluta son propiedades independientes. Una no implica la otra. Para ejemplos específicos,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + x^2} , \quad -\infty < x < \infty \quad (1.62)$$

y

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = \ln(1 + x) , \quad 0 \leq x \leq 1 , \quad (1.63)$$

converge uniformemente en los intervalos indicados pero no converge absolutamente. Por otra parte,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - x)x^n = \begin{cases} 1 , & 0 \leq x < 1 \\ 0 , & x = 1 \end{cases} , \quad (1.64)$$

converge absolutamente pero no uniformemente en $[0, 1]$.

A partir de la definición de convergencia uniforme podríamos mostrar que cualquier serie

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) , \quad (1.65)$$

no puede converger uniformemente en ningún intervalo que incluya una discontinuidad de $f(x)$.

Ya que la prueba M de Weierstrass establece tanto la convergencia uniforme como absoluta, necesariamente falla para series que son uniformes pero condicionalmente convergentes.

1.5.3. Prueba de Abel.

Una prueba algo más delicada para la convergencia uniforme ha sido dada por Abel. Si

$$u_n(x) = a_n f_n(x) ,$$

$$\sum a_n = A , \quad \text{convergente,}$$

y las funciones $f(x)$ son monótonas [$f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$] y acotadas, $0 \leq f_n(x) \leq M$, para todo x en $[a, b]$, entonces $\sum u_n(x)$ converge uniformemente en $[a, b]$.

Las series uniformemente convergentes tienen tres propiedades particularmente útiles.

1. Si los términos individuales $u_n(x)$ son continuos, la suma de la serie

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) , \quad (1.66)$$

es también continua.

2. Si los términos individuales $u_n(x)$ son continuos, las series pueden ser integradas término a término. La suma de las integrales es igual a la integral de la suma.

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx . \quad (1.67)$$

3. Las derivadas de la suma de la serie $f(x)$ es igual a la suma de los términos individuales derivados,

$$\frac{df(x)}{dx} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{du_n(x)}{dx} , \quad (1.68)$$

siempre que las siguientes condiciones sean satisfechas:

$$u_n(x) \text{ y } \frac{du_n(x)}{dx} \text{ son continuas en } [a, b].$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{du_n(x)}{dx} \text{ es uniformemente convergente en } [a, b].$$

La integración término a término de una serie uniformemente convergente² requiere sólo continuidad de los términos individuales. Esta condición casi siempre es satisfecha en las aplicaciones físicas. La diferenciación término a término de una serie a menudo no es válida porque deben satisfacer condiciones más restrictivas. Por cierto, encontraremos casos en series de Fourier, en la cual la diferenciación término a término de una serie uniformemente convergente tiende a una serie divergente.

²La integración término a término también puede ser válida en ausencia de convergencia uniforme.

1.6. Expansión de Taylor.

Esta es una expansión de una función en una serie infinita o en una serie finita más un término remanente. Los coeficientes de los términos sucesivos de la serie involucra las derivadas sucesivas de la función. Este tipo de expansiones de son ampliamente usadas. Ahora derivaremos la expansión de Taylor.

Supongamos que nuestra función $f(x)$ tiene una derivada n -ésima continua en el intervalo $a \leq x \leq b$. Entonces, integrando esta n -ésima derivada n veces,

$$\begin{aligned} \int_a^x f^{(n)}(x) dx &= f^{(n-1)}(x) \Big|_a^x = f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a) \\ \int_a^x \left(\int_a^x f^{(n)}(x) dx \right) dx &= \int_a^x [f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)] dx \\ &= f^{(n-2)}(x) - f^{(n-2)}(a) - (x-a)f^{(n-1)}(a) . \end{aligned} \quad (1.69)$$

Continuando, obtenemos

$$\int \int \int_a^x f^{(n)}(x)(dx)^3 = f^{(n-3)}(x) - f^{(n-3)}(a) - (x-a)f^{(n-2)}(a) - \frac{(x-a)^2}{2} f^{(n-1)}(a) . \quad (1.70)$$

Finalmente, integrando por n -ésima vez,

$$\begin{aligned} \int_a^x \cdots \int f^{(n)}(x)(dx)^n &= f(x) - f(a) - (x-a)f'(a) + \\ &\quad - \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) - \cdots - \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) . \end{aligned} \quad (1.71)$$

Note que esta expresión es exacta. No hay términos que hayan sido excluidos, ni aproximaciones hechas. Ahora, resolviendo para $f(x)$, tenemos

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + R_n . \quad (1.72)$$

El remanente, R_n , está dado por la integral n -dimensional

$$\int_a^x \cdots \int f^{(n)}(x)(dx)^n . \quad (1.73)$$

Este remanente, ecuación (1.73), puede ser puesto en una forma más inteligible usando la forma integral del teorema del valor medio

$$\int_a^x g(x) dx = (x-a)g(\xi) , \quad (1.74)$$

con $a \leq \xi \leq x$. Integrando n veces obtenemos la forma Lagrangiana del remanente:

$$R_n = \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(\xi) . \quad (1.75)$$

Con la expansión de Taylor en esta forma no estamos interesados en cualquier pregunta de convergencia de series infinitas. Esta serie es finita, la sola pregunta que nos importa es la magnitud del remanente.

Cuando la función $f(x)$ es tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0, \quad (1.76)$$

la ecuación (1.72) se convierte en la serie de Taylor

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a). \end{aligned} \quad (1.77)$$

Nuestra serie de Taylor especifica el valor de una función en un punto, x , en términos del valor de la función y sus derivadas en un punto de referencia, a . Esta es una expansión en potencias de un cambio en la variable, $\Delta x = x - a$ en este caso. La notación puede ser variada según la conveniencia del usuario. Con la sustitución $x \rightarrow x + h$ y $a \rightarrow x$ tenemos una forma alterna

$$f(x+h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x).$$

Cuando usamos el operador $D = d/dx$ la expansión de Taylor se convierte en

$$f(x+h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n D^n}{n!} f(x) = e^{hD} f(x).$$

Una forma en operadores equivalente de la expansión de Taylor. Una derivación de la expansión de Taylor en el contexto de la teoría de variable compleja aparece en el próximo capítulo.

1.6.1. Teorema de Maclaurin.

Si expandimos alrededor del origen ($a = 0$), la ecuación (1.77) es conocida como la serie de Maclaurin

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0). \end{aligned} \quad (1.78)$$

Una aplicación inmediata de la serie de Maclaurin (o serie de Taylor) está en la expansión de varias funciones transcendentales en una serie infinita.

Ejemplo

Sea $f(x) = e^x$. Diferenciando, tenemos

$$f^{(n)}(0) = 1, \quad (1.79)$$

para todo n , $n = 1, 2, 3, \dots$. Entonces, para la ecuación (1.78), tenemos

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \quad (1.80)$$

Esta es la expansión en serie de la función exponencial. Algunos autores usan esta serie para definir la función exponencial.

Aunque esta serie es claramente convergente para todo x , podríamos chequear el término remanente, R_n . Por la ecuación (1.75) tenemos

$$\begin{aligned} R_n &= \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(\xi) \\ &= \frac{x^n}{n!} e^{\xi}, \quad 0 \leq |\xi| \leq x. \end{aligned} \quad (1.81)$$

Por lo tanto

$$|R_n| \leq \frac{x^n}{n!} e^x \quad (1.82)$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0 \quad (1.83)$$

para todo los valores finitos de x , el cual indica que esta expansión de Maclaurin de e^x es válida sobre el intervalo $-\infty < x < \infty$.

Ejemplo

Sea $f(x) = \ln(1+x)$. Diferenciando, obtenemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{(1+x)}, \\ f^{(n)}(x) &= (-1)^{n-1} (n-1)! \frac{1}{(1+x)^n}. \end{aligned} \quad (1.84)$$

La expansión de Maclaurin produce

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + R_n \\ &= \sum_{p=1}^n (-1)^{p-1} \frac{x^p}{p} + R_n. \end{aligned} \quad (1.85)$$

En este caso el remanente está dado por

$$\begin{aligned} R_n &= \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(\xi), \quad 0 \leq \xi \leq x \\ &\leq \frac{x^n}{n}, \quad 0 \leq \xi \leq x \leq 1. \end{aligned} \quad (1.86)$$

Ahora el remanente se aproxima a cero cuando n crece indefinidamente, dado $0 \leq x \leq 1^3$. Como una serie infinita

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \quad (1.87)$$

la cual converge para $-1 < x \leq 1$. El intervalo $-1 < x < 1$ es fácilmente establecido por la prueba de la razón de D' Alembert. La convergencia en $x = 1$ se deduce a partir del criterio de Leibniz. En particular, en $x = 1$, tenemos

$$\begin{aligned} \ln 2 &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}, \end{aligned} \quad (1.88)$$

la serie armónica alterna condicionalmente convergente.

1.6.2. Teorema Binomial.

Una segunda, aplicación extremadamente importante de las expansiones de Taylor y Maclaurin es la derivación del teorema binomial para potencias negativas y/o no enteras.

Sea $f(x) = (1+x)^m$, en la cual m puede ser negativo y no está limitado a valores enteros. La aplicación directa de la ecuación (1.78) da

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + R_n. \quad (1.89)$$

Para esta función el remanente es

$$R_n = \frac{x^n}{n!} (1+\xi)^{m-n} \times m(m-1) \cdots (m-n+1) \quad (1.90)$$

y ξ con $0 \leq \xi \leq x$. Ahora, para $n > m$, $(1+\xi)^{m-n}$ es un máximo para $\xi = 0$. Por lo tanto

$$R_n \leq \frac{x^n}{n!} \times m(m-1) \cdots (m-n+1). \quad (1.91)$$

Note que los factores dependientes de m no dan un cero a menos que m sea entero no negativo; R_n tiende a cero cuando $n \rightarrow \infty$ si x está restringido al intervalo $0 \leq x \leq 1$. La expansión binomial resulta

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \dots. \quad (1.92)$$

En otra notación equivalente

$$\begin{aligned} (1+x)^m &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m!}{n!(m-n)!} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} x^n. \end{aligned} \quad (1.93)$$

³Este intervalo puede ser fácilmente extendido a $-1 < x \leq 1$ pero no a $x = -1$.

Cuando la cantidad $\binom{m}{n}$ es igual a $m!/(n!(m-n)!)$, es llamado el *coeficiente binomial*. Aunque hemos mostrado solamente que el remanente se anula,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0 ,$$

para $0 \leq x < 1$, realmente puede mostrarse que la serie en la ecuación (1.92) converge en el intervalo extendido $-1 < x < 1$. Para m un entero, $(m-n)! = \pm\infty$ si $n > m$ y las series automáticamente terminan en $n = m$.

Ejemplo Energía relativista.

La energía total relativista de una partícula es

$$E = mc^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} . \quad (1.94)$$

Comparemos esta ecuación con la energía cinética clásica, $\frac{1}{2}mv^2$.

Por la ecuación (1.92) con $x = -\frac{v^2}{c^2}$ y $m = -\frac{1}{2}$ tenemos

$$E = mc^2 \left[1 - \frac{1}{2} \left(-\frac{v^2}{c^2}\right) + \frac{(-1/2)(-3/2)}{2!} \left(-\frac{v^2}{c^2}\right)^2 + \frac{(-1/2)(-3/2)(-5/2)}{3!} \left(-\frac{v^2}{c^2}\right)^3 + \dots \right] .$$

o

$$E = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{3}{8}mv^2 \frac{v^2}{c^2} + \frac{5}{16}mv^2 \left(\frac{v^2}{c^2}\right)^2 + \dots . \quad (1.95)$$

El primer término, mc^2 , lo identificamos como la masa en reposo. Entonces

$$E_{\text{cinética}} = \frac{1}{2}mv^2 \left[1 + \frac{3}{4} \frac{v^2}{c^2} + \frac{5}{8} \left(\frac{v^2}{c^2}\right)^2 + \dots \right] . \quad (1.96)$$

Para la velocidad de la partícula $v \ll c$, donde c es la velocidad de la luz, la expresión en los paréntesis cuadrados se reduce a la unidad y vemos que la porción cinética de la energía relativista total concuerda con el resultado clásico.

Para polinomios podemos generalizar la expansión binomial a

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_m)^n = \sum \frac{n!}{n_1!n_2! \dots n_m!} a_1^{n_1} a_2^{n_2} \dots a_m^{n_m} ,$$

donde la suma anterior incluye todas las combinaciones diferentes de los n_1, n_2, \dots, n_m tal que $\sum_{i=1}^m n_i = n$. Aquí n_i y n son enteros. Esta generalización encuentra considerables usos en Mecánica Estadística.

Las series de Maclaurin pueden aparecer algunas veces indirectamente más que el uso directo de la ecuación (1.78). Por ejemplo, la manera más conveniente para obtener la expansión en serie

$$\operatorname{sen}^{-1} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \dots, \quad (1.97)$$

es hacer uso de la relación

$$\operatorname{sen}^{-1} x = \int_0^x \frac{dt}{(1-t^2)^{1/2}}.$$

Expandimos $(1-t^2)^{-1/2}$ (teorema binomial) y luego integramos término a término. Esta integración término a término es discutida en la sección 1.7. El resultado es la ecuación (1.97). Finalmente, podemos tomar el límite cuando $x \rightarrow 1$. La serie converge por la prueba de Gauss.

1.6.3. Expansión de Taylor de más de una variable.

La función f tiene más de una variable independiente, es decir, $f = f(x, y)$, la expansión de Taylor se convierte en

$$\begin{aligned} f(x, y) = & f(a, b) + (x-a) \frac{\partial f}{\partial x} + (y-b) \frac{\partial f}{\partial y} + \\ & + \frac{1}{2!} \left[(x-a)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2(x-a)(y-b) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + (y-b)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right] + \\ & + \frac{1}{3!} \left[(x-a)^3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + 3(x-a)^2(y-b) \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} + \right. \\ & \left. + 3(x-a)(y-b)^2 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} + (y-b)^3 \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \right] + \dots, \end{aligned} \quad (1.98)$$

con todas las derivadas evaluadas en el punto (a, b) . Usando $\alpha_j t = x_j - x_{j0}$, podemos escribir la expansión de Taylor para m variables independientes en la forma simbólica

$$f(x_j) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left(\sum_{i=1}^m \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^n f(x_k) \Big|_{x_k=x_{k0}}. \quad (1.99)$$

Una forma vectorial conveniente es

$$\psi(\vec{r} + \vec{a}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\vec{a} \cdot \vec{\nabla})^n \psi(\vec{r}). \quad (1.100)$$

1.7. Series de potencias.

Las series de potencias son un tipo especial y extremadamente útil de series infinitas de la forma

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \end{aligned} \quad (1.101)$$

donde los coeficientes a_i son constantes e independientes de x .⁴

1.7.1. Convergencia.

La ecuación (1.101) puede testearse rápidamente para la convergencia ya sea por la prueba de la raíz de Cauchy o por la prueba de la razón de D' Alembert. Si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = R^{-1}, \quad (1.102)$$

la serie converge para $-R < x < R$. Este es el intervalo o radio de convergencia. Ya que las pruebas de la raíz y la razón fallan cuando el límite es la unidad, el punto final del intervalo requiere atención especial.

Por ejemplo, si $a_n = n^{-1}$, entonces $R = 1$ y, la serie converge para $x = -1$, pero diverge para $x = +1$. Si $a_n = n!$, entonces $R = 0$ y la serie diverge para todo $x \neq 0$.

1.8. Convergencia uniforme y absoluta.

Supongamos que nuestra serie de potencia es convergente para $-R < x < R$; entonces será uniforme y absolutamente convergente en cualquier intervalo interior, $-S \leq x \leq S$, donde $0 < S < R$. Esto podría ser probado directamente por la prueba M de Weierstrass usando $M_i = |a_i|S^i$.

1.8.1. Continuidad.

Ya que cada término $u_n(x) = a_n x^n$ es una función continua de x y $f(x) = \sum a_n x^n$ converge uniformemente para $-S \leq x \leq S$, $f(x)$ debería ser una función continua en el intervalo de convergencia uniforme. Este comportamiento es contradictorio con el comportamiento impresionantemente diferente de las series de Fourier. Las series de Fourier son usadas frecuentemente para representar funciones discontinuas tales como ondas cuadradas y ondas dientes de sierra.

1.8.2. Diferenciación e integración.

Con $u_n(x)$ continua y $\sum a_n x^n$ uniformemente convergente, encontramos que la serie diferenciada es una serie de potencia con funciones continuas y del mismo radio de convergencia que la serie original. Los nuevos factores introducidos por diferenciación (o integración) no afecta ni a la prueba de la raíz ni a la de la razón. Por lo tanto nuestra serie podría ser diferenciada o integrada tan a menudo como deseemos dentro del intervalo de convergencia uniforme.

En vista de las restricciones algo severas puestas en la diferenciación, esto es un resultado valioso y notable.

⁴La ecuación (1.101) puede ser reescrita con $z = x + iy$, reemplazando a x . Luego todos los resultados de esta sección se aplican a series complejas

1.8.3. Teorema de unicidad.

En la sección precedente, usando las series de Maclaurin, expandimos e^x y $\ln(1+x)$ en series infinitas. En los capítulos venideros las funciones son frecuentemente representadas e incluso definidas por series infinitas. Ahora estableceremos que la representación de la serie de potencias es única.

Si

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, & -R_a < x < R_a \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, & -R_b < x < R_b, \end{aligned} \quad (1.103)$$

con intervalos de convergencia sobrepuestos, incluyendo el origen, luego

$$a_n = b_n, \quad (1.104)$$

para todo n ; esto es, supongamos dos representaciones de serie de potencias (diferentes) y luego procedamos a demostrar que las dos son idénticas.

De la ecuación (1.103)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \quad -R < x < R \quad (1.105)$$

donde R es el más pequeño entre R_a, R_b . Haciendo $x = 0$ para eliminar todo salvo el término constante, obtenemos

$$a_0 = b_0. \quad (1.106)$$

Ahora, aprovechándose de la diferenciabilidad de nuestra serie de potencia, diferenciamos la ecuación (1.105), obteniendo

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n b_n x^{n-1}. \quad (1.107)$$

De nuevo ajustamos $x = 0$ para aislar el nuevo término constante y encontramos

$$a_1 = b_1. \quad (1.108)$$

Repitiendo este proceso n veces, obtenemos

$$a_n = b_n, \quad (1.109)$$

lo cual muestra que las dos series coinciden. Por lo tanto nuestra representación en serie de potencia es única.

Esto será un punto crucial cuando usamos una serie de potencia para desarrollar soluciones de ecuaciones diferenciales. Esta unicidad de las series de potencia aparece frecuentemente en física teórica. La teoría de perturbaciones en Mecánica Cuántica es un ejemplo de esto. La representación en serie de potencia de funciones es a menudo útil en formas de evaluación indeterminadas, particularmente cuando la regla de l'Hospital puede ser inconveniente de aplicar.

Ejemplo

Evaluemos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} . \quad (1.110)$$

Remplazando $\cos x$ por su expansión en serie de Maclaurin, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \frac{1 - (1 - x^2/2! + x^4/4! - \dots)}{x^2} \\ &= \frac{x^2/2! - x^4/4! + \dots}{x^2} \\ &= \frac{1}{2!} - \frac{x^2}{4!} + \dots . \end{aligned}$$

Tomando $x \rightarrow 0$, tenemos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} . \quad (1.111)$$

La unicidad de las series de potencia significa que los coeficientes a_n pueden ser identificadas con las derivadas en una serie de Maclaurin. A partir de

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) x^n$$

tenemos

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) .$$

1.8.4. Inversión de series de potencia.

Supongamos que tenemos una serie

$$\begin{aligned} y - y_0 &= a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x - x_0)^n , \end{aligned} \quad (1.112)$$

en la cual está dada $(y - y_0)$ en términos de $(x - x_0)$. Sin embargo, podría ser deseable tener una expresión explícita para $(x - x_0)$ en términos de $(y - y_0)$. Necesitamos resolver la ecuación (1.112) para $(x - x_0)$ por inversión de nuestra serie. Supongamos que

$$x - x_0 = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (y - y_0)^n , \quad (1.113)$$

con b_n determinado en términos de los supuestamente conocidos a_n . Una aproximación a fuerza bruta, la cual es perfectamente adecuada para los primeros coeficientes, ya que es simplemente sustituir la ecuación (1.112) en la ecuación (1.113). Igualando los coeficientes

de $(x - x_0)^n$ en ambos lados de la ecuación (1.113), ya que la serie de potencia es única, obtenemos

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{a_1}, \\ b_2 &= \frac{a_2}{a_1^3}, \\ b_3 &= \frac{1}{a_1^5}(2a_2^2 - a_1a_3), \\ b_4 &= \frac{1}{a_1^7}(5a_1a_2a_3 - a_1^2a_4 - 5a_2^3), \quad \text{y así sucesivamente.} \end{aligned} \tag{1.114}$$

Los coeficientes mayores son listados en tablas generalmente. Una aproximación más general y mucho más elegante es desarrollada usando variables complejas.

1.9. Integrales elípticas.

Las integrales elípticas son incluidas aquí parcialmente como una ilustración del uso de las series de potencias y por su propio interés intrínseco. Este interés incluye la ocurrencia de las integrales elípticas en una gran variedad de problemas físicos.

Ejemplo Período de un péndulo simple.

Para pequeñas oscilaciones en la amplitud nuestro péndulo, figura 1.8, tiene un movimiento armónico simple con un período $T = 2\pi(l/g)^{1/2}$. Para una amplitud grande θ_M tal que $\sin \theta_M \neq \theta_M$, la segunda ley de movimiento de Newton y las ecuaciones de Lagrange conducen a una ecuación diferencial no lineal ($\sin \theta$ es una función no lineal de θ), así que necesitamos un acercamiento diferente.

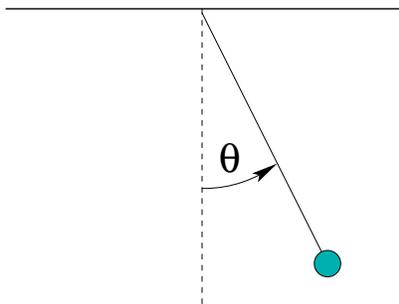


Figura 1.8: Péndulo simple.

La masa oscilante m tiene una energía cinética de $ml^2(d\theta/dt)^2/2$ y una energía potencial de $-mgl \cos \theta$ ($\theta = \pi/2$ como la elección del cero de la energía potencial). Ya que $d\theta/dt = 0$ en $\theta = \theta_M$, el principio de la conservación de la energía da

$$\frac{1}{2}ml^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - mgl \cos \theta = -mgl \cos \theta_M. \tag{1.115}$$

Resolviendo para $d\theta/dt$ obtenemos

$$\frac{d\theta}{dt} = \pm \left(\frac{2g}{l}\right)^{1/2} (\cos \theta - \cos \theta_M)^{1/2} \quad (1.116)$$

con la cancelación de la masa m . Tomando t como cero cuando $\theta = 0$ y $d\theta/dt > 0$. Una integración desde $\theta = 0$ a $\theta = \theta_M$ produce

$$\int_0^{\theta_M} (\cos \theta - \cos \theta_M)^{-1/2} d\theta = \left(\frac{2g}{l}\right)^{1/2} \int_0^t dt = \left(\frac{2g}{l}\right)^{1/2} t. \quad (1.117)$$

Esto es 1/4 del ciclo, y por lo tanto el tiempo t es 1/4 del período, T . Notemos que $\theta \leq \theta_M$, trataremos la sustitución

$$\text{sen} \left(\frac{\theta}{2}\right) = \text{sen} \left(\frac{\theta_M}{2}\right) \text{sen} \varphi. \quad (1.118)$$

Con esto, la ecuación (1.117) se convierte en

$$T = 4 \left(\frac{l}{g}\right)^{1/2} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \text{sen}^2 \left(\frac{\theta_M}{2}\right) \text{sen}^2 \varphi}} \quad (1.119)$$

Aunque no hay un obvio mejoramiento en la ecuación (1.117), la integral ahora corresponde a la integral elíptica completa del primer tipo, $K(\text{sen} \theta_M/2)$. A partir de la expansión de serie, el período de nuestro péndulo puede ser desarrollado como una serie de potencia en $\text{sen} \theta_M/2$:

$$T = 2\pi \left(\frac{l}{g}\right)^{1/2} \left[1 + \frac{1}{4} \text{sen}^2 \frac{\theta_M}{2} + \frac{9}{64} \text{sen}^4 \frac{\theta_M}{2} + \dots\right] \quad (1.120)$$

1.9.1. Definiciones.

Generalizando el ejemplo anterior para incluir el límite superior como una variable, la *integral elíptica del primer tipo* está definida como

$$F(\varphi \setminus \alpha) = \int_0^{\varphi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \text{sen}^2 \alpha \text{sen}^2 \theta}} \quad (1.121)$$

o

$$F(x|m) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-mt^2)}}, \quad 0 \leq m < 1. \quad (1.122)$$

Para $\varphi = \pi/2$, $x = 1$, tenemos la *integral elíptica completa de primer tipo*,

$$\begin{aligned} K(m) &= \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - m \text{sen}^2 \theta}} \\ &= \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-mt^2)}}, \end{aligned} \quad (1.123)$$

con $m = \text{sen}^2 \alpha$, $0 \leq m < 1$.

La *integral elíptica de segundo tipo* está definida por

$$E(\varphi|\alpha) = \int_0^\varphi \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \theta} d\theta \quad (1.124)$$

o

$$E(x|m) = \int_0^x \sqrt{\frac{1 - mt^2}{1 - t^2}} dt, \quad 0 \leq m < 1 \quad (1.125)$$

Nuevamente, para el caso $\varphi = \pi/2$, $x = 1$, tenemos la *integral elíptica completa de segundo tipo*:

$$\begin{aligned} E(m) &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - m \operatorname{sen}^2 \theta} d\theta \\ &= \int_0^1 \sqrt{\frac{1 - mt^2}{1 - t^2}} dt, \quad 0 \leq m < 1. \end{aligned} \quad (1.126)$$

La figura 1.9 muestra el comportamiento de $K(m)$ y $E(m)$. Los valores de ambas funciones pueden encontrarse en tablas o evaluar en *software* como *Mathematica*.

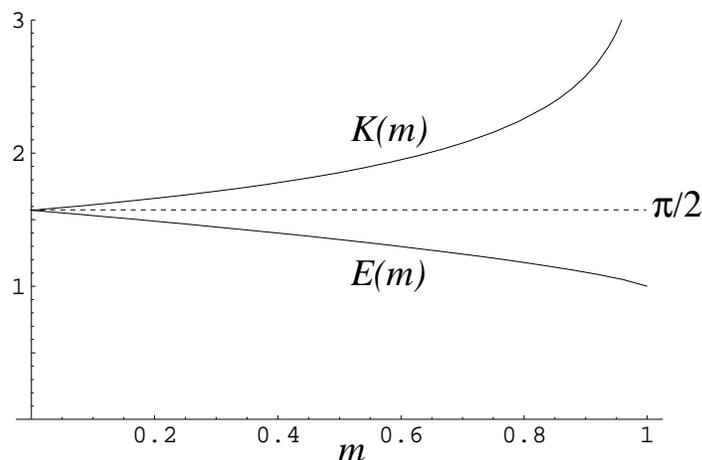


Figura 1.9: Integrales elípticas completas, $K(m)$, $E(m)$.

1.9.2. Expansión de series.

Para nuestro intervalo $0 \leq m < 1$, el denominador de $K(m)$ puede ser expandido en serie binomial

$$\begin{aligned} (1 - m \operatorname{sen}^2 \theta)^{-1/2} &= 1 + \frac{1}{2} m \operatorname{sen}^2 \theta + \frac{3}{8} m^2 \operatorname{sen}^4 \theta + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} m^n \operatorname{sen}^{2n} \theta. \end{aligned} \quad (1.127)$$

Para cualquier intervalo cerrado $[0, m_{\max}]$, con $m_{\max} < 1$, esta serie es uniformemente convergente y puede ser integrada término a término.

$$\int_0^{\pi/2} \text{sen}^{2n} \theta \, d\theta = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{\pi}{2}. \quad (1.128)$$

De modo que

$$K(m) = \frac{\pi}{2} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 m + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 m^2 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 m^3 + \dots \right]. \quad (1.129)$$

Similarmente,

$$E(m) = \frac{\pi}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{m}{1} - \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \frac{m^2}{3} - \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \frac{m^3}{5} - \dots \right]. \quad (1.130)$$

Más adelante estas series son identificadas como funciones hipergeométricas, y tenemos

$$K(m) = \frac{\pi}{2} {}_2F_1 \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; m \right) \quad (1.131)$$

$$E(m) = \frac{\pi}{2} {}_2F_1 \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; m \right) \quad (1.132)$$

1.9.3. Valores límites.

De las series en las ecuaciones (1.129) y (1.130), o a partir de las integrales definidas, obtenemos

$$\lim_{m \rightarrow 0} K(m) = \frac{\pi}{2}, \quad (1.133)$$

$$\lim_{m \rightarrow 0} E(m) = \frac{\pi}{2}. \quad (1.134)$$

Para $m \rightarrow 1$, las expansiones en series no son muy útiles, A partir de la representación integral tenemos que

$$\lim_{m \rightarrow 1} K(m) = \infty, \quad (1.135)$$

diverge logarítmicamente, y por otra parte, la integral para $E(m)$ tiene un límite finito

$$\lim_{m \rightarrow 1} E(m) = 1. \quad (1.136)$$

Las integrales elípticas han sido usadas ampliamente en el pasado para evaluar integrales. Por ejemplo, integrales de la forma

$$I = \int_0^x R(t, \sqrt{a_4 t^4 + a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0}) \, dt,$$

donde R es una función racional de t y del radical, pueden ser expresadas en términos de integrales elípticas. Con los computadores actuales disponibles para una evaluación numérica rápida y directa, el interés en estas técnicas de integrales elípticas ha declinado. Sin embargo, las integrales elípticas mantienen su interés a causa de su apariencia en problemas en Física.

1.10. Números de Bernoulli.

Los números de Bernoulli fueron introducidos por Jacques Bernoulli. Hay muchas definiciones equivalentes, pero debe tenerse extremo cuidado, porque algunos autores introducen variaciones en la numeración o en signo. Un acercamiento relativamente simple para definir los números de Bernoulli es por la serie⁵

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n x^n}{n!}, \quad (1.137)$$

la cual converge para $|x| < 2\pi$ usando el test del cociente. Diferenciando esta serie de potencia repetidamente y luego evaluando para $x = 0$, obtenemos

$$B_n = \left[\frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{x}{e^x - 1} \right) \right]_{x=0}. \quad (1.138)$$

Específicamente,

$$B_1 = \left. \frac{d}{dx} \left(\frac{x}{e^x - 1} \right) \right|_{x=0} = \frac{1}{e^x - 1} - \frac{x e^x}{(e^x - 1)^2} \Big|_{x=0} = -\frac{1}{2}, \quad (1.139)$$

como puede ser visto por la expansión en series de los denominadores. Usando $B_0 = 1$ y $B_1 = -1/2$, es fácil verificar que la función

$$\frac{x}{e^x - 1} - 1 + \frac{x}{2} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_n x^n}{n!} = -\frac{x}{e^{-x} - 1} - 1 - \frac{x}{2}, \quad (1.140)$$

es par en x , tal que todos los $B_{2n+1} = 0$.

Para derivar una relación de recurrencia para los números de Bernoulli, multiplicamos

$$\begin{aligned} \frac{e^x - 1}{x} \frac{x}{e^x - 1} = 1 &= \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{(m+1)!} \right] \left[1 - \frac{x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n} x^{2n}}{(2n)!} \right] \\ &= 1 + \sum_{m=1}^{\infty} x^m \left[\frac{1}{(m+1)!} - \frac{1}{2m!} \right] + \sum_{N=2}^{\infty} x^N \sum_{1 \leq n \leq N/2} \frac{B_{2n}}{[(2n)!(N-2n+1)!]}. \end{aligned} \quad (1.141)$$

La ecuación (1.141) produce

$$\frac{1}{2}(N+1) - 1 = \sum_{1 \leq n \leq N/2} B_{2n} \binom{N+1}{2n} = \frac{1}{2}(N-1), \quad (1.142)$$

la cual es equivalente a

$$\begin{aligned} N - \frac{1}{2} &= \sum_{n=1}^N B_{2n} \binom{2N+1}{2n}, \\ N - 1 &= \sum_{n=1}^{N-1} B_{2n} \binom{2N}{2n}. \end{aligned} \quad (1.143)$$

⁵La función $\frac{x}{e^x - 1}$ puede ser considerada una *función generatriz* ya que genera los números de Bernoulli.

n	B_n	B_n
0	1	1.0000 00000
1	$-\frac{1}{2}$	-0.5000 00000
2	$\frac{1}{6}$	0.1666 66667
3	$-\frac{1}{30}$	-0.0333 33333
4	$\frac{1}{42}$	0.0238 09524
5	$-\frac{1}{30}$	-0.0333 33333
6	$\frac{5}{66}$	0.0757 57576

Cuadro 1.1: Números de Bernoulli

A partir de la ecuación (1.143) los números de Bernoulli en la tabla 1.1 se obtienen rápidamente. Si la variable x en la ecuación (1.137) es remplazada por $2xi$ (y B_1 elegido igual a $-1/2$), obtenemos una definición alternativa (y equivalente) de B_{2n} , la expresión

$$x \cot x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n B_{2n} \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}, \quad -\pi < x < \pi. \quad (1.144)$$

Usando el método del residuo o trabajando a partir de la representación de producto infinito de $\sin(x)$, encontramos que

$$B_{2n} = \frac{(-1)^{n-1} 2(2n)!}{(2\pi)^{2n}} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^{2n}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots. \quad (1.145)$$

Esta representación de los números de Bernoulli fue descubierta por Euler. Es fácil ver a partir de la ecuación (1.145) que $|B_{2n}|$ aumenta sin límite cuando $n \rightarrow \infty$. Ilustrando el comportamiento divergente de los números de Bernoulli, tenemos

$$\begin{aligned} B_{20} &= -5.291 \times 10^2 \\ B_{200} &= -3.647 \times 10^{215}. \end{aligned}$$

Algunos autores prefieren definir los números de Bernoulli con una versión modificada de la ecuación (1.145) usando

$$B_{2n} = \frac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n}} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^{2n}}, \quad (1.146)$$

el subíndice es justo la mitad de nuestro subíndice original y todos los signos son positivos. Nuevamente, se debe chequear cuidadosamente la definición que se está usando de los números de Bernoulli.

Los números de Bernoulli aparecen frecuentemente en teoría de números. El teorema de von Standt-Clausen establece que

$$B_{2n} = A_n - \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_3} - \dots - \frac{1}{p_k}, \quad (1.147)$$

en el cual A_n es un entero y p_1, p_2, \dots, p_k son números primos tal que $p_i - 1$ es un divisor de $2n$. Podemos fácilmente verificar que esto se satisface para

$$\begin{aligned} B_6(A_3 = 1, p = 2, 3, 7) , \\ B_8(A_4 = 1, p = 2, 3, 5) , \\ B_{10}(A_5 = 1, p = 2, 3, 11) , \end{aligned} \quad (1.148)$$

y otros casos especiales.

Los números de Bernoulli aparecen en la suma de potencias enteras de enteros,

$$\sum_{j=1}^N j^p , \quad p \text{ entero.}$$

y en numerosas expansiones de series de las funciones trascendentales, incluyendo $\tan x$, $\cot x$, $\sin^{-1} x$, $\ln |\sin x|$, $\ln |\cos x|$, $\ln |\tan x|$, $\tanh x$, $\coth x$ y $\cosh^{-1} x$. Por ejemplo,

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \dots + \frac{(-1)^{n-1}2^{2n}(2^{2n} - 1)B_{2n}}{(2n)!}x^{2n-1} + \dots . \quad (1.149)$$

Los números de Bernoulli probablemente vengan en tales expansiones en series a causa de las ecuaciones de definición (1.137) y (1.143) y de su relación con la función zeta de Riemann

$$\zeta(2n) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^{2n}} . \quad (1.150)$$

1.10.1. Funciones de Bernoulli.

Si la ecuación (1.137) puede ser fácilmente generalizada, tenemos

$$\frac{xe^{xs}}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(s) \frac{x^n}{n!} . \quad (1.151)$$

definiendo las *funciones de Bernoulli*, $B_n(s)$. Las primeras siete funciones de Bernoulli están dadas en la tabla 1.2.

De la función generadora, ecuación (1.151),

$$B_n(0) = B_n , \quad n = 1, 2, \dots . \quad (1.152)$$

la función de Bernoulli evaluadas en cero es igual al correspondiente número de Bernoulli. Dos propiedades particularmente importantes de las funciones de Bernoulli se deducen a partir de la definición: una relación de diferenciación

$$B'_n(s) = nB_{n-1}(s) , \quad n = 1, 2, \dots . \quad (1.153)$$

y una relación de simetría

$$B_n(1) = (-1)^n B_n(0) , \quad n = 1, 2, \dots . \quad (1.154)$$

Estas relaciones son usadas en el desarrollo de la fórmula de integración de Euler-Maclaurin.

$$\begin{aligned}
B_0 &= 1 \\
B_1 &= x - \frac{1}{2} \\
B_2 &= x^2 - x + \frac{1}{6} \\
B_3 &= x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x \\
B_4 &= x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30} \\
B_5 &= x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^2 - \frac{1}{6}x \\
B_6 &= x^6 - 3x^5 + \frac{5}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{42}
\end{aligned}$$

Cuadro 1.2: Funciones de Bernoulli

1.10.2. Fórmula de integración de Euler-Maclaurin.

Uno de los usos de las funciones de Bernoulli es la derivación de la fórmula de integración de Euler-Maclaurin. Esta fórmula es usada en el desarrollo de una expresión asintótica para la función factorial, serie de Stirling. La técnica es integración por partes repetida, usando la ecuación (1.153) para crear nuevas derivadas. Comenzamos con

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 f(x)B_0(x) dx . \quad (1.155)$$

A partir de la ecuación (1.153)

$$B_1'(x) = B_0(x) = 1 . \quad (1.156)$$

Sustituyendo $B_1'(x)$ en la ecuación (1.155) e integrando por partes, obtenemos

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(x) dx &= f(1)B_1(1) - f(0)B_1(0) - \int_0^1 f'(x)B_1(x) dx \\
&= \frac{1}{2}[f(1) - f(0)] - \int_0^1 f'(x)B_1(x) dx
\end{aligned} \quad (1.157)$$

Nuevamente, usando la ecuación (1.153), tenemos

$$B_1(x) = \frac{1}{2}B_2'(x) , \quad (1.158)$$

e integrando por partes

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(x) dx &= \frac{1}{2}[f(1) - f(0)] - \frac{1}{2!}[f'(1)B_2(1) - f'(0)B_2(0)] + \\
&\quad \frac{1}{2!} \int_0^1 f^{(2)}(x)B_2(x) dx .
\end{aligned} \quad (1.159)$$

Usando las relaciones,

$$\begin{aligned}
B_{2n}(1) &= B_{2n}(0) = B_{2n} , & n &= 0, 1, 2, \dots \\
B_{2n+1}(1) &= B_{2n+1}(0) = 0 , & n &= 1, 2, 3, \dots ,
\end{aligned} \quad (1.160)$$

y continuando este proceso, tenemos

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2}[f(1) - f(0)] - \sum_{p=1}^q \frac{1}{(2p)!} B_{2p}[f^{(2p-1)}(1) - f^{(2p-1)}(0)] + \frac{1}{(2q)!} \int_0^1 f^{(2q)}(x) B_{2q}(x) dx . \quad (1.161)$$

Esta es la fórmula de integración de Euler-Maclaurin. Supone que la función $f(x)$ tiene todas las derivadas requeridas.

El intervalo de integración en la ecuación (1.161) puede ser trasladado de $[0, 1]$ a $[1, 2]$ reemplazando $f(x)$ por $f(x + 1)$. Sumando tales resultados hasta $[n - 1, n]$,

$$\int_0^n f(x) dx = \frac{1}{2}f(0) + f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1) + \frac{1}{2}f(n) + \sum_{p=1}^q \frac{1}{(2p)!} B_{2p}[f^{(2p-1)}(n) - f^{(2p-1)}(0)] + \frac{1}{(2q)!} \int_0^1 B_{2q}(x) \sum_{\nu=0}^{n-1} f^{(2q)}(x + \nu) dx . \quad (1.162)$$

Los términos $\frac{1}{2}f(0) + f(1) + \cdots + \frac{1}{2}f(n)$ aparecen exactamente como una integración o cuadratura trapezoidal. La suma sobre p puede ser interpretada como una corrección a la aproximación trapezoidal. La ecuación (1.162) es la forma usada en la derivación de la fórmula de Stirling.

La fórmula de Euler-Maclaurin es a menudo útil para sumar series al convertirlas en integrales.

1.11. Función zeta de Riemann.

Estas series $\sum_{p=1}^{\infty} p^{-2n}$ fueron usadas como series de comparación para probar la convergencia y en la ecuación (1.144) como una definición de los números de Bernoulli, B_{2n} . También sirve para definir la función zeta de Riemann por

$$\zeta(s) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} , \quad s > 1 . \quad (1.163)$$

La tabla 1.3 muestra los valores de $\zeta(s)$ para s entero, $s = 2, 3, \dots, 10$. La figura 1.10 es un gráfico de $\zeta(s) - 1$. Una expresión integral para esta función zeta de Riemann aparecerá como parte del desarrollo de la función gama.

Otra interesante expresión para la función zeta puede ser derivada como

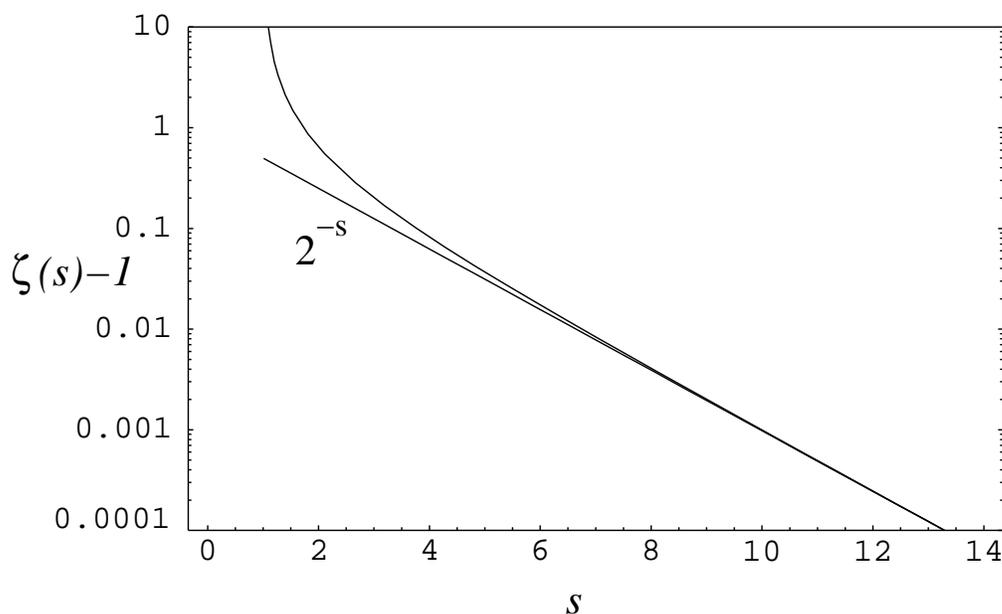
$$\zeta(s)(1 - 2^{-s}) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots - \left(\frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{6^s} + \cdots \right) \quad (1.164)$$

eliminando todos los n^{-s} , donde n es un múltiplo de 2. Entonces

$$\zeta(s)(1 - 2^{-s})(1 - 3^{-s}) = 1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{9^s} + \cdots - \left(\frac{1}{3^s} + \frac{1}{9^s} + \frac{1}{15^s} + \cdots \right) , \quad (1.165)$$

s	$\zeta(s)$
2	1.64493 40668
3	1.20205 69032
4	1.08232 32337
5	1.03692 77551
6	1.01734 30620
7	1.00834 92774
8	1.00407 73562
9	1.00200 83928
10	1.00099 45751

Cuadro 1.3: Función zeta de Riemann.

Figura 1.10: Función zeta de Riemann, $\zeta(s) - 1$, versus s .

eliminando todos los términos remanentes, donde n es un múltiplo de 3. Continuando, tenemos $\zeta(s)(1 - 2^{-s})(1 - 3^{-s})(1 - 5^{-s}) \dots (1 - P^{-s})$, donde P es un número primo, y todos los términos n^{-s} , en el cual n es un múltiplo entero por sobre P , son cancelados. Para $P \rightarrow \infty$,

$$\zeta(s)(1 - 2^{-s})(1 - 3^{-s}) \dots (1 - P^{-s}) = \zeta(s) \prod_{P(\text{primo})=2}^{\infty} (1 - P^{-s}) = 1. \quad (1.166)$$

Por lo tanto

$$\zeta(s) = \left[\prod_{P(\text{primo})=2}^{\infty} (1 - P^{-s}) \right]^{-1} \quad (1.167)$$

dando $\zeta(s)$ como un producto infinito.⁶

Este procedimiento de cancelación tiene una clara aplicación en el cálculo numérico. La ecuación (1.164) dará $\zeta(s)(1 - 2^{-s})$ con la misma precisión como la ecuación (1.163) da $\zeta(s)$, pero solamente con la mitad de términos. (En cuyo caso, podría hacerse una corrección para despreciar la cola de la serie por la técnica de Maclaurin reemplazando la serie por una integral).

Conjuntamente con la función zeta de Riemann, habitualmente se definen otras tres funciones de sumas de potencia recíprocas:

$$\eta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} = (1 - 2^{1-s})\zeta(s) ,$$

$$\lambda(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^s} = \left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \zeta(s) ,$$

y

$$\beta(s) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)^s} .$$

A partir de los números de Bernoulli o de las series de Fourier podemos determinar algunos valores especiales

$$\zeta(2) = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\zeta(4) = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \cdots = \frac{\pi^4}{90}$$

$$\eta(2) = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \cdots = \frac{\pi^2}{12}$$

$$\eta(4) = 1 - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \cdots = \frac{7\pi^4}{720}$$

$$\lambda(2) = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}$$

$$\lambda(4) = 1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \cdots = \frac{\pi^4}{96}$$

$$\beta(1) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots = \frac{\pi}{4}$$

$$\beta(3) = 1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \cdots = \frac{\pi^3}{32}$$

La constante de Catalán

$$\beta(2) = 1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \cdots = 0.9159\ 6559 \dots ,$$

⁶Este es el punto de partida para la vasta aplicación de la función zeta de Riemann a la teoría de números.

1.11.1. Mejoramiento de la convergencia.

Si requerimos sumar una serie convergente $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ cuyos términos son funciones racionales de n , la convergencia puede ser mejorada dramáticamente introduciendo la función zeta de Riemann.

Ejemplo Mejorando la convergencia.

El problema es evaluar la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+n^2)}$. Expandiendo $\frac{1}{(1+n^2)} = \frac{1}{n^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)}$ por

división directa, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+n^2} &= \frac{1}{n^2} \left(1 - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4} - \frac{n^{-6}}{1+n^{-2}} \right) \\ &= \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^6} - \frac{1}{n^8 + n^6} . \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} = \zeta(2) - \zeta(4) + \zeta(6) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^8 + n^6} .$$

Las funciones ζ son conocidas y el remanente de la series converge como n^{-6} . Claramente, el proceso puede ser continuado hasta cuando uno desee. Usted puede hacer una elección entre cuánta álgebra hará y cuánta aritmética hará el computador.

Otros métodos para mejorar la efectividad computacional están dadas al final de la sección 1.2 y 1.4.

1.12. Series asintóticas o semi-convergentes.

Las series asintóticas aparecen frecuentemente en Física. En cálculo numérico ellas son empleadas para el cálculo de una variedad de funciones. Consideremos aquí dos tipos de integrales que conducen a series asintóticas: primero, una integral de la forma

$$I_1(x) = \int_x^{\infty} e^{-u} f(u) du ,$$

donde la variable x aparece como el límite inferior de una integral. Segundo, consideremos la forma

$$I_2(x) = \int_0^{\infty} e^{-u} f\left(\frac{u}{x}\right) du ,$$

con la función f expandible en serie de Taylor. Las series asintóticas a menudo ocurren como solución de ecuaciones diferenciales. Un ejemplo de este tipo de series aparece como una de las soluciones de la ecuación de Bessel.

1.12.1. Función gama incompleta.

La naturaleza de una serie asintótica es quizás mejor ilustrada por un ejemplo específico. Supongamos que tenemos una función integral exponencial⁷

$$Ei(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^u}{u} du, \quad (1.168)$$

o

$$-Ei(-x) = \int_x^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du = E_1(x), \quad (1.169)$$

para ser evaluada para grandes valores de x . Mejor todavía, tomemos una generalización de la función factorial incompleta (función gama incompleta),

$$I(x, p) = \int_x^{\infty} e^{-u} u^{-p} du = \Gamma(1 - p, x), \quad (1.170)$$

en la cual x y p son positivas. De nuevo, buscamos evaluarla para valores grandes de x .

Integrando por partes, obtenemos

$$I(x, p) = \frac{e^{-x}}{x^p} - p \int_x^{\infty} e^{-u} u^{-p-1} du = \frac{e^{-x}}{x^p} - \frac{pe^{-x}}{x^{p+1}} + p(p+1) \int_x^{\infty} e^{-u} u^{-p-2} du \quad (1.171)$$

Continuando para integrar por partes, desarrollamos la serie

$$I(x, p) = e^{-x} \left(\frac{1}{x^p} - \frac{p}{x^{p+1}} + \frac{p(p+1)}{x^{p+2}} - \dots (-1)^{n-1} \frac{(p+n-2)!}{(p-1)!x^{p+n-1}} \right) + (-1)^n \frac{(p+n-1)!}{(p-1)!} \int_x^{\infty} e^{-u} u^{-p-n} du. \quad (1.172)$$

Esta es una serie notable. Chequeando la convergencia por la prueba de D' Alembert, encontramos

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(p+n)!}{(p+n-1)!} \frac{1}{x} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(p+n)}{x} \\ &= \infty \end{aligned} \quad (1.173)$$

para todos los valores finitos de x . Por lo tanto nuestras series son series infinitas que divergen en todas partes!. Antes de descartar la ecuación (1.172) como inútil, veamos cuan bien una suma parcial dada se aproxima a la función factorial incompleta, $I(x, p)$.

$$= (-1)^{n+1} \frac{(p+n)!}{(p-1)!} \int_x^{\infty} e^{-u} u^{-p-n-1} du = R_n(x, p). \quad (1.174)$$

⁷Esta función ocurre con frecuencia en problemas astrofísicos que involucran gases con una distribución de energía de Maxwell-Boltzmann.

En valor absoluto

$$|I(x, p) - s_n(x, p)| \leq \frac{(p+n)!}{(p-1)!} \int_x^\infty e^{-u} u^{-p-n-1} du .$$

Luego sustituimos $u = v + x$ la integral se convierte en

$$\begin{aligned} \int_x^\infty e^{-u} u^{-p-n-1} du &= e^{-x} \int_0^\infty e^{-v} (v+x)^{-p-n-1} dv \\ &= \frac{e^{-x}}{x^{p+n+1}} \int_0^\infty e^{-v} \left(1 + \frac{v}{x}\right)^{-p-n-1} dv . \end{aligned}$$

Para x grande la integral final se aproxima a 1 y

$$|I(x, p) - s_n(x, p)| \approx \frac{(p+n)!}{(p-1)!} \frac{e^{-x}}{x^{p+n+1}} . \quad (1.175)$$

Esto significa que si tomamos un x suficientemente grande, nuestra suma parcial s_n es arbitrariamente una buena aproximación a la función deseada $I(x, p)$. Nuestra serie divergente, por lo tanto, es perfectamente buena para cálculos de sumas parciales. Por esta razón algunas veces es llamada *serie semi-convergente*. Notemos que la potencia de x en el denominador del remanente $(p+n+1)$ es más alto que la potencia de x en último término incluido en $s_n(x, p)$, $(p+n)$.

Ya que el remanente $R_n(x, p)$ alterna en signo, las sucesivas sumas parciales dan alternadamente cotas superiores e inferiores para $I(x, p)$. El comportamiento de la serie (con $p=1$) como una función del número de términos incluidos es mostrado en la figura 1.11. Tenemos

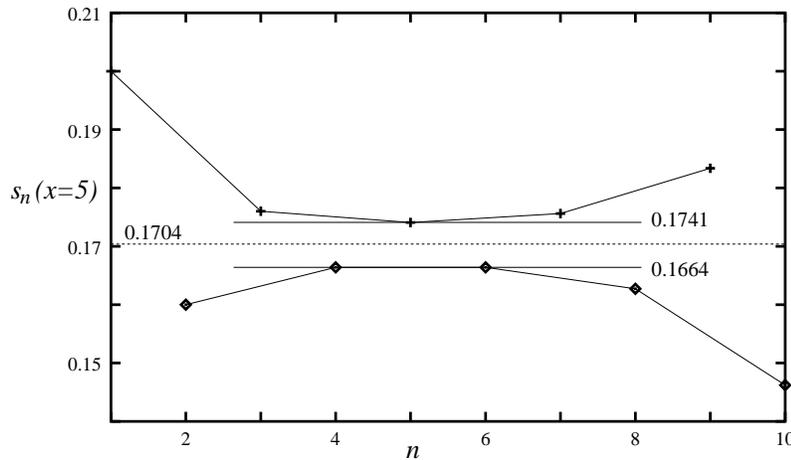


Figura 1.11: Sumas parciales de $e^x E_1(x) \Big|_{x=5}$.

$$\begin{aligned} e^x E_1(x) &= e^x \int_x^\infty \frac{e^{-u}}{u} du \\ &= s_n(x) \approx \frac{1}{x} - \frac{1!}{x^2} + \frac{2!}{x^3} - \frac{3!}{x^4} + \dots + (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}} , \end{aligned} \quad (1.176)$$

la cual es evaluada en $x = 5$. Para un valor dado de x las sucesivas cotas superiores e inferiores dadas por las sumas parciales primero convergen y luego divergen. La determinación óptima de $e^x E_1(x)$ está dada por la aproximación más cercana de las cotas superiores e inferiores, esto es, entre $s_4 = s_6 = 0.1664$ y $s_5 = 0.1741$ para $x = 5$. Por lo tanto

$$0.1664 \leq e^x E_1(x) \Big|_{x=5} \leq 0.1741 . \quad (1.177)$$

Realmente, a partir de las tablas,

$$e^x E_1(x) \Big|_{x=5} = 0.1704 , \quad (1.178)$$

dentro de los límites establecidos por nuestra expansión asintótica. Note cuidadosamente que la inclusión de términos adicionales en la serie de expansión más allá del punto óptimo, literalmente reduce la precisión de la representación.

Cuando aumentamos x , la diferencia entre la cota superior más baja y la cota inferior más alta disminuirá. Tomando x suficientemente grande, uno podría calcular $e^x E_1(x)$ para cualquier grado de precisión deseado.

1.12.2. Integrales coseno y seno.

Las series asintóticas también pueden ser desarrolladas a partir de integrales definidas si el integrando tiene el comportamiento requerido. Como un ejemplo, las integrales seno y coseno están definidas por

$$Ci(x) = - \int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt , \quad (1.179)$$

$$si(x) = - \int_x^\infty \frac{\sen t}{t} dt , \quad (1.180)$$

Combinando éstas con funciones trigonométricas regulares, podemos definir

$$\begin{aligned} f(x) &= Ci(x) \sen(x) - si(x) \cos(x) = \int_0^\infty \frac{\sen(x)}{y+x} dy \\ g(x) &= -Ci(x) \cos(x) - si(x) \sin(x) = \int_0^\infty \frac{\cos(x)}{y+x} dy \end{aligned} \quad (1.181)$$

con la nueva variable $y = t - x$. Llevando a variable compleja, tenemos

$$\begin{aligned} g(x) + if(x) &= \int_0^\infty \frac{e^{iy}}{y+x} dy \\ &= \int_0^\infty \frac{ie^{-xu}}{1+iu} du \end{aligned} \quad (1.182)$$

en el cual $u = -iy/x$. Los límites de integración, 0 a ∞ , a más que de 0 a $-i\infty$, puede ser justificado por el teorema de Cauchy. Racionalizando el denominador e igualando la parte

real y la parte imaginaria, obtenemos

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_0^{\infty} \frac{ue^{-xu}}{1+u^2} du, \\ f(x) &= \int_0^{\infty} \frac{e^{-xu}}{1+u^2} du. \end{aligned} \quad (1.183)$$

La convergencia de las integrales requiere que $\text{Re}(x) > 0$.⁸

Ahora, desarrollamos la expansión asintótica, consideremos el cambio de variable $v = xu$ y expandimos el factor $[1 + (v/x)^2]^{-1}$ por el teorema del binomio. Tenemos

$$\begin{aligned} f(x) &\approx \frac{1}{x} \int_0^{\infty} e^{-v} \sum_{0 \leq n \leq N} (-1)^n \frac{v^{2n}}{x^{2n}} dv = \frac{1}{x} \sum_{0 \leq n \leq N} (-1)^n \frac{(2n)!}{x^{2n}} \\ g(x) &\approx \frac{1}{x^2} \int_0^{\infty} e^{-v} \sum_{0 \leq n \leq N} (-1)^n \frac{v^{2n+1}}{x^{2n}} dv = \frac{1}{x^2} \sum_{0 \leq n \leq N} (-1)^n \frac{(2n+1)!}{x^{2n}}. \end{aligned} \quad (1.184)$$

De las ecuaciones (1.181) y (1.184)

$$\begin{aligned} Ci(x) &\approx \frac{\text{sen}(x)}{x} \sum_{0 \leq n \leq N} (-1)^n \frac{(2n)!}{x^{2n}} - \frac{\cos(x)}{x^2} \sum_{0 \leq n \leq N} (-1)^n \frac{(2n+1)!}{x^{2n}} \\ si(x) &\approx -\frac{\cos(x)}{x} \sum_{0 \leq n \leq N} (-1)^n \frac{(2n)!}{x^{2n}} - \frac{\text{sen}(x)}{x^2} \sum_{0 \leq n \leq N} (-1)^n \frac{(2n+1)!}{x^{2n}}, \end{aligned} \quad (1.185)$$

las expansiones asintóticas deseadas.

La técnica de expandir el integrando de una integral definida e integrar término a término lo volveremos a aplicar para desarrollar una expansión asintótica de la función de Bessel modificada K_v y también para las expansiones de las dos funciones hipergeométricas confluentes $M(a, c; x)$ y $U(a, c; x)$.

1.12.3. Definición de series asintóticas.

El comportamiento de estas series (ecuaciones (1.172) y (1.185)) en consistencia con las propiedades definidas para una serie asintótica⁹. Siguiendo a Poincaré, tomamos

$$x^n R_n(x) = x^n [f(x) - s_n(x)], \quad (1.186)$$

donde

$$s_n(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots + \frac{a_n}{x^n}. \quad (1.187)$$

La expansión asintótica de $f(x)$ tiene las propiedades que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^n R_n(x) = 0, \quad \text{para } n \text{ fijo}, \quad (1.188)$$

⁸La parte real.

⁹No es necesario que las series asintóticas sean series de potencia.

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^n R_n(x) = \infty, \quad \text{para } x \text{ fijo,} \quad (1.189)$$

Vemos la ecuaciones (1.172) y (1.173) como un ejemplo de estas propiedades. Para series de potencias, como las supuestas en la forma de $s_n(x)$, $R_n(x) \sim x^{-n-1}$. Con condiciones (1.188) y (1.189) satisfechas, escribimos

$$f(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{1}{x^n}. \quad (1.190)$$

Notemos el uso de \approx en lugar de $=$. La función $f(x)$ es igual a la serie solamente en el límite cuando $x \rightarrow \infty$.

Las expansiones asintóticas de dos funciones pueden ser multiplicadas entre sí y el resultado será una expansión asintótica de un producto de dos funciones.

La expansión asintótica de una función dada $f(t)$ puede ser integrada término a término (justo como en una serie uniformemente convergente de una función continua) a partir de $x \leq t < \infty$ y el resultado será una expansión asintótica de $\int_x^{\infty} f(t) dt$. Una diferenciación término a término, sin embargo, es válida solamente bajo condiciones muy especiales.

Algunas funciones no poseen una expansión asintótica; e^x es un ejemplo de tales funciones. Sin embargo, si una función tiene una expansión asintótica, tiene solamente una. La correspondencia no es uno a uno; muchas funciones pueden tener la misma expansión asintótica.

Uno de los métodos más poderoso y útil de generar expansiones asintóticas, es el método de *steepest descents*, será desarrollado más adelante. Las aplicaciones incluyen la derivación de la fórmula de Stirling para la función factorial (completa) y las formas asintóticas de las varias funciones de Bessel.

1.12.4. Aplicaciones a cálculo numérico.

Las series asintóticas son usadas frecuentemente en el cálculo de funciones por los computadores. Este es el caso de las funciones de Neumann $N_0(x)$ y $N_1(x)$, y las funciones modificadas de Bessel $I_n(x)$ y $K_n(x)$. Las series asintóticas para integrales del tipo exponencial, ecuación (1.176), para las integrales de Fresnel, y para la función de error de Gauss, son usadas para la evaluación de estas integrales para valores grandes del argumento. Cuán grande debería ser el argumento depende de la precisión requerida.

1.13. Productos infinitos.

Consideremos una sucesión de factores positivos $f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot f_4 \cdots f_n (f_i > 0)$. Usando \prod mayúscula para indicar el producto, tenemos

$$f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot f_4 \cdots f_n = \prod_{i=1}^n f_i. \quad (1.191)$$

Definimos p_n , como el producto parcial, en analogía con s_n la suma parcial,

$$p_n = \prod_{i=1}^n f_i, \quad (1.192)$$

y entonces investigamos el límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = P . \quad (1.193)$$

Si P es finito (pero no cero), decimos que el producto infinito es convergente. Si P es infinito o cero, el producto infinito es etiquetado como divergente.

Ya que el producto divergerá a infinito si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n > 1 \quad (1.194)$$

o a cero para

$$0 < \lim_{n \rightarrow \infty} f_n < 1 , \quad (1.195)$$

es conveniente escribir nuestro producto como

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n) .$$

La condición $a_n \rightarrow 0$ es entonces una condición necesaria (pero no suficiente) para la convergencia.

El producto infinito puede ser relacionado a una serie infinita por el método obvio de tomar el logaritmo

$$\ln \prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + a_n) . \quad (1.196)$$

Una relación más útil es probada por el siguiente teorema.

1.13.1. Convergencia de un producto infinito.

Si $0 \leq a_n < 1$, el producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$ y $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - a_n)$ converge si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge y diverge si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Considerando el término $1 + a_n$, vemos que de la ecuación (1.80)

$$1 + a_n \leq e^{a_n} . \quad (1.197)$$

Por lo tanto el producto parcial p_n

$$p_n \leq e^{s_n} , \quad (1.198)$$

y haciendo $n \rightarrow \infty$,

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n) \leq \exp \sum_{n=1}^{\infty} a_n . \quad (1.199)$$

estableciendo una cota superior para el producto infinito.

Para desarrollar una cota más baja, notemos que

$$p_n = 1 + \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j + \cdots > s_n , \quad (1.200)$$

ya que $a_i \geq 0$. De modo que

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n) \geq \sum_{n=1}^{\infty} a_n . \quad (1.201)$$

Si la suma infinita permanece finita, el producto infinito también lo hará. Si la suma infinita diverge, también lo hará el producto infinito.

El caso de $\prod(1 - a_n)$ es complicado por el signo negativo, pero una prueba de que depende de la prueba anterior puede ser desarrollada notando que para $a_n < 1/2$ (recuerde que $a_n \rightarrow 0$ para convergencia)

$$(1 - a_n) \leq \frac{1}{1 + a_n}$$

y

$$(1 - a_n) \geq \frac{1}{1 + 2a_n} . \quad (1.202)$$

1.13.2. Funciones seno, coseno y gama.

El lector reconocerá que un polinomio de orden n $P_n(x)$ con n raíces reales puede ser escrito como un producto de n factores:

$$P_n(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n) = \prod_{i=1}^n (x - x_i) . \quad (1.203)$$

De la misma manera podemos esperar que una función con un número infinito de raíces pueda ser escrito como un producto infinito, un factor para cada raíz. Esto es por cierto el caso de las funciones trigonométricas. Tenemos dos representaciones muy útiles en productos infinitos,

$$\text{sen}(x) = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2} \right) , \quad (1.204)$$

$$\text{cos}(x) = \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 - \frac{4x^2}{(2n-1)^2 \pi^2} \right] . \quad (1.205)$$

La más conveniente y quizás la más elegante derivación de estas dos expresiones es usando variable compleja. Por nuestro teorema de convergencia, las ecuaciones (1.204) y (1.205) son convergentes para todos los valores finitos de x . Específicamente, para el producto infinito para el $\text{sen}(x)$, $a_n = x^2/n^2\pi^2$,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n &= \frac{x^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{x^2}{\pi^2} \zeta(2) \\ &= \frac{x^2}{6} . \end{aligned} \quad (1.206)$$

La serie correspondiente a la ecuación (1.205) se comporta en una manera similar.

La ecuación (1.204) conduce a dos resultados interesantes. Primero, si fijamos $x = \pi/2$, obtenemos

$$1 = \frac{\pi}{2} \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 - \frac{1}{(2n)^2} \right] = \frac{\pi}{2} \prod_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n)^2 - 1}{(2n)^2} \right] . \quad (1.207)$$

Resolviendo para $\pi/2$, obtenemos

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)} \right] = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7} \cdots, \quad (1.208)$$

la cual es la famosa fórmula de Wallis para $\pi/2$.

El segundo resultado involucra la función factorial o función gama. Una definición de la función gama es

$$\Gamma(x) = \left[x e^{\gamma x} \prod_{r=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{r} \right) e^{-\frac{x}{r}} \right]^{-1}, \quad (1.209)$$

donde γ es la constante de Euler-Mascheroni, sección 1.2. Si tomamos el producto de $\Gamma(x)$ y $\Gamma(-x)$, la ecuación (1.209) tiende a

$$\begin{aligned} \Gamma(x)\Gamma(-x) &= - \left[x e^{\gamma x} \prod_{r=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{r} \right) e^{-\frac{x}{r}} x e^{-\gamma x} \prod_{r=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{r} \right) e^{\frac{x}{r}} \right]^{-1} \\ &= - \left[x^2 \prod_{r=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{r^2} \right) \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (1.210)$$

Usando la ecuación (1.204) con x reemplazado por πx , obtenemos

$$\Gamma(x)\Gamma(-x) = -\frac{\pi}{x \operatorname{sen}(\pi x)}. \quad (1.211)$$

Anticipando una relación de recurrencia desarrollada posteriormente, tenemos que usando $-x\Gamma(-x) = \Gamma(1-x)$, la ecuación (1.211) puede ser escrita como

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi x)}. \quad (1.212)$$

Esto será útil cuando tratamos la función gama.

Estrictamente hablando, podríamos chequear el intervalo en x para el cual la ecuación (1.209) es convergente. Claramente, para $x = 0, -1, -2, \dots$ los factores individuales se anulan. La prueba que el producto infinito converge para todos los otros valores (finitos) de x es dejado como ejercicio.

Estos productos infinitos tienen una variedad de usos en matemática analítica. Sin embargo, a causa de su lentitud de convergencia, ellas no son aptas para un trabajo numérico preciso.

Capítulo 2

Números Complejos

versión 1.1, 5 de Mayo del 2003

2.1. Introducción.

Definición 2.1 *Dominio de integridad, D . Es un conjunto de elementos entre los cuales están definidas las operaciones de suma y multiplicación con las siguientes propiedades:*

a) *Para todo a, b que pertenece a D existe un solo $a + b \in D$ y un solo $a \cdot b \in D$ tal que se satisfacen*

- *La conmutatividad $a + b = b + a$ y $a \cdot b = b \cdot a$.*
- *La asociatividad $a + (b + c) = (a + b) + c$ y $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.*

b) *Existe un elemento $0 \in D$ y un elemento $1 \in D$ con $0 \neq 1$ tal que $\forall a \in D$,*

$$\begin{aligned}a + 0 &= 0 + a = a \\ a \cdot 1 &= 1 \cdot a = a .\end{aligned}$$

c) *Para todo $a \in D$ sólo existe un $x \in D$ tal que $a + x = 0$ a tal elemento se le llama **opuesto** de a y es $-a$.*

d) *Si $c \in D$ con $c \neq 0$ y $c \cdot a = c \cdot b$, entonces $a = b$ **ley de simplificación**.*

Un par de ejemplos de dominios de integridad son los números reales, \mathbb{R} , y los números racionales, \mathbb{Q} .

Definición 2.2 *Campo, C . Es un dominio de integridad que contiene para cada elemento $a \neq 0$ un elemento llamado **inverso** de a y denotado a^{-1} tal que*

$$a \cdot a^{-1} = 1 .$$

Definición 2.3 *Correspondencia biunívoca. Existe una correspondencia biunívoca entre los conjuntos A y B si a todos los elementos $a \in A$ se les puede hacer corresponder un **sólo** elemento $a' \in B$ y **viceversa**.*

Notación: $a \leftrightarrow a'$, $a \in A$ y $a' \in B$.

Ejemplo Considere $x \leftrightarrow x + 1$ para todo $x \in \mathbb{Z}$.

Ejemplo (Los puntos de un plano dotados de un sistema ortogonal de ejes) \leftrightarrow (pares de números reales).

Definición 2.4 *Isomorfismo.* Un isomorfismo entre dos campos C y C' es una correspondencia biunívoca $a \leftrightarrow a'$ con $a \in C$ y $a' \in C'$ que satisface para cualquier par de elementos $a \in C$ y $a' \in C'$ las condiciones:

$$\begin{aligned}(a + b)' &= a' + b' \\ (a \cdot b)' &= a' \cdot b' .\end{aligned}$$

En tal caso se dice que C es isomorfo a C' .

Definición 2.5 *Número complejo.* Un número complejo es un par (x, y) de números reales que satisfacen las reglas:

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y') \quad (2.1)$$

$$(x, y) \cdot (x', y') = (xx' - yy', xy' + yx') . \quad (2.2)$$

Estos números complejos forman un campo que llamamos campo complejo \mathbb{C} .

Consideremos el dominio D por los números reales (\mathbb{R}) y la raíz de la ecuación $x^2 + 1 = 0$ i.e. $i \equiv \sqrt{-1}$, $i^2 = -1$. Toda expresión de la forma $x + iy$ (con $x, y \in \mathbb{R}$), pertenece a D . Por definición de dominio de integridad

$$(x + iy) + (x' + iy') = x + x' + i(y + y') \quad (2.3)$$

$$(x + iy) \cdot (x' + iy') = xx' - yy' + i(xy' + x'y) . \quad (2.4)$$

Establezcamos la correspondencia

$$(x, y) \rightarrow x + iy .$$

Afirmamos que esta correspondencia es biunívoca, en efecto, si

$$\begin{aligned}(x, y) &\rightarrow x + iy \\ (x', y') &\rightarrow x' + iy' ,\end{aligned}$$

y

$$(x + iy) = (x' + iy') \Rightarrow (x - x') = i(y - y') ,$$

elevando al cuadrado

$$(x - x')^2 = -(y - y')^2 \Rightarrow (x - x')^2 + (y - y')^2 = 0 ,$$

como ambos términos son ≥ 0 , deben ser nulos por separados,

$$x - x' = 0 , y - y' = 0 \Rightarrow x = x' , y = y' ,$$

es decir, si $(x + iy) = (x' + iy')$ entonces $(x, y) = (x', y')$ son iguales. A cada elemento le corresponde un sólo elemento y viceversa. Por lo tanto, a partir de (2.1), (2.2) y (2.3), (2.4), se tiene que el conjunto \mathbb{C} es isomorfo a $D = \{\mathbb{R}, i \equiv \sqrt{-1}\}$.

Por lo anterior concluimos que si $z = (x, y)$ es un número complejo, entonces $z = x + iy$. Identificamos a x como la parte real de z , i.e $\text{Re}(z) = x$. De la misma manera, identificamos a y como la parte imaginaria de z , i.e $\text{Im}(z) = y$. Además tenemos las siguientes equivalencias:

$$(x, 0) = x, \quad (0, 1) = i, \quad (1, 0) = 1, \quad (0, y) = iy,$$

En el último caso tenemos un número que es imaginario puro.

2.2. Plano complejo.

La forma $x+iy$ de los complejos nos conduce a definir lo que llamaremos el plano complejo, figura 2.1,

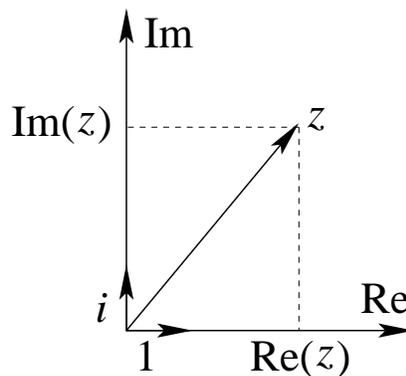


Figura 2.1: Plano complejo.

Aquí los vectores “distinguidos” son 1 y i . El número complejo z tiene dos interpretaciones en el plano complejo:

- Como un vector en este espacio vectorial de dimensión 2, isomorfo a \mathbb{R}^2 .
- Como un punto de este plano.

Definición 2.6 *Complejo Conjugado.* El complejo conjugado de $z = (x, y) = x + iy$ es $\tilde{z} = z^* = (x, -y) = x - iy$. La operación de tomar el conjugado de un número complejo corresponde, gráficamente, a una reflexión respecto al eje real.

Propiedades: Para todo $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

1.

$$\begin{aligned} \widetilde{(z_1 + z_2)} &= (z_1 + z_2)^* = ((x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2))^* \\ &= (x_1 + x_2) - i(y_1 + y_2) \\ &= (x_1 - iy_1) + (x_2 - iy_2) = z_1^* + z_2^* \\ (z_1 + z_2)^* &= z_1^* + z_2^* . \end{aligned} \tag{2.5}$$

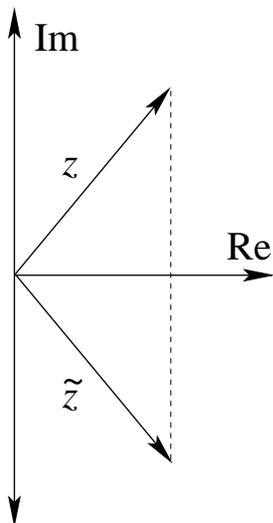


Figura 2.2: Complejo conjugado.

2.

$$\begin{aligned}
 \widetilde{(-z_1)} &= (-z_1)^* = (-x_1 - iy_1)^* \\
 &= -x_1 + iy_1 \\
 &= -(x_1 - iy_1) = -(z_1^*) \\
 (-z_1)^* &= -(z_1^*) .
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

3.

$$\begin{aligned}
 \widetilde{(z_1 \cdot z_2)} &= (z_1 \cdot z_2)^* = (x_1x_2 - y_1y_2) - i(x_2y_1 + x_1y_2) \\
 &= x_1x_2 - (-y_1)(-y_2) + i(x_1(-y_2) + x_2(-y_1)) = z_1^* \cdot z_2^* \\
 (z_1 \cdot z_2)^* &= z_1^* \cdot z_2^* .
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

4.

$$\widetilde{\tilde{z}} = (z^*)^* = z . \tag{2.8}$$

5.

$$z + \tilde{z} = z + z^* = 2 \operatorname{Re}(z) . \tag{2.9}$$

6.

$$z - \tilde{z} = z - z^* = 2i \operatorname{Im}(z) . \tag{2.10}$$

7.

$$\begin{aligned}
 z \cdot \tilde{z} &= z \cdot z^* = (x + iy)(x - iy) \\
 &= x^2 - (i)^2 y^2 = x^2 + y^2 \equiv |z|^2 \\
 z \cdot z^* &= |z|^2 .
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

En general, el conjugado de una expresión racional de complejos será igual a la expresión racional de los complejos conjugados. Por ejemplo, $\det(a_{ij}) = \det(\tilde{a}_{ij})$.

A partir de lo anterior, podemos dar una expresión para el inverso de z en función de z^* y $|z|^2$. El inverso de z es tal que

$$\begin{aligned} z \cdot \frac{1}{z} &= 1 \\ z^* \cdot z \cdot \frac{1}{z} &= z^* \\ |z|^2 \cdot \frac{1}{z} &= z^* \\ \frac{1}{z} &= \frac{z^*}{|z|^2} . \end{aligned}$$

Si $z = x + iy$ la expresión anterior toma la forma

$$\frac{1}{z} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} .$$

2.3. Representación polar.

Cada número complejo $z = x + iy$ puede representarse en forma polar

$$z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) , \quad (2.12)$$

donde

$$r = |z| = \sqrt{(\operatorname{Re}(z))^2 + (\operatorname{Im}(z))^2} , \quad \theta = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) , \quad \text{con } -\pi < \theta \leq \pi . \quad (2.13)$$

2.4. Distancia en el plano complejo.

La distancia entre dos puntos z_1 y z_2 en el plano complejo: $d \equiv |z_2 - z_1|$, figura 2.4 (a).

Si z es tal que $|z - z_0| < R$, entonces z se encuentra en el interior de una circunferencia de radio R con centro en z_0 , figura 2.4 (b).

2.5. Desigualdad triangular.

Teorema 2.1 Para cualquier par de números complejos z_1 y z_2 se tiene que

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| . \quad (2.14)$$

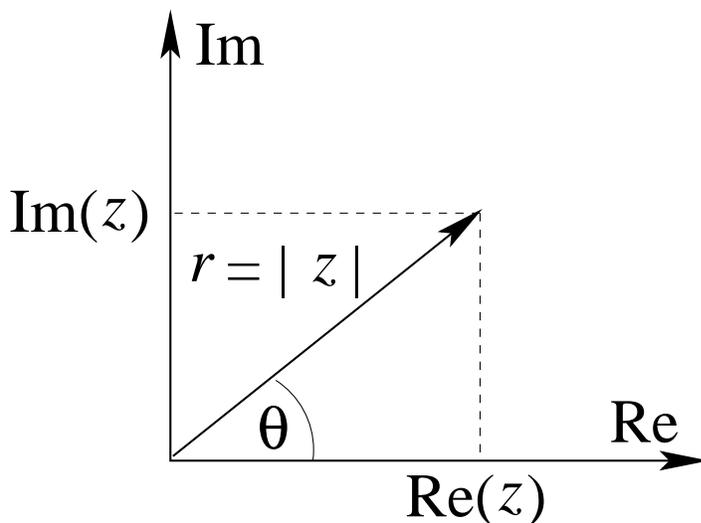


Figura 2.3: Representación polar.

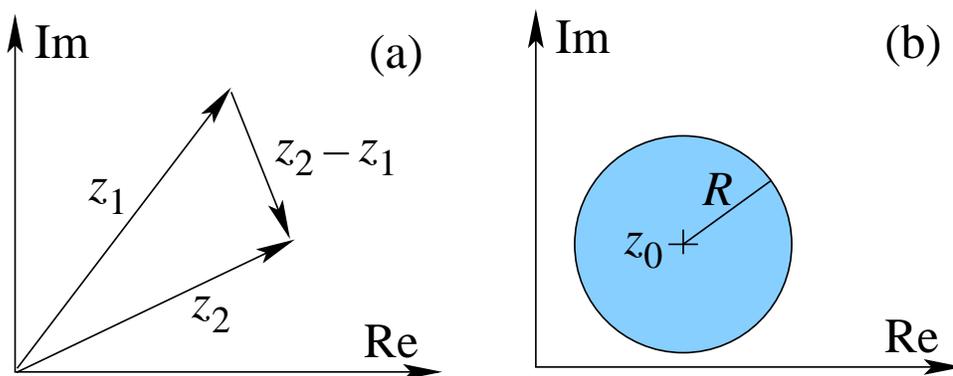


Figura 2.4: Distancia en el plano complejo.

Demostración Sean $z_1 = a_1 + ib_1$ y $z_2 = a_2 + ib_2$,

$$(a_1b_2 - a_2b_1)^2 = a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 - 2a_1b_2a_2b_1 \geq 0$$

$$a_1^2a_2^2 + a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 + b_1^2b_2^2 \geq a_1^2a_2^2 + 2a_1b_2a_2b_1 + b_1^2b_2^2$$

$$(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) = |z_1|^2 |z_2|^2 \geq (a_1a_2 + b_1b_2)^2$$

$$|z_1| |z_2| \geq (a_1a_2 + b_1b_2)$$

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1| |z_2| \geq 2a_1a_2 + 2b_1b_2 + a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2$$

$$(|z_1| + |z_2|)^2 \geq (a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2 = |z_1 + z_2|^2$$

$$|z_1| + |z_2| \geq |z_1 + z_2| .$$

q.e.d.

2.6. Isomorfismo con matrices.

El álgebra de los números complejos es isomorfa a la de las matrices de la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$. Consideremos dos complejos $z_1 = a_1 + ib_1$ y $z_2 = a_2 + ib_2$ y asociémosles, vía la función \mathcal{A} . Las matrices $\mathcal{A}(z_1) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix}$ y $\mathcal{A}(z_2) = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{pmatrix}$ respectivamente. Podemos probar que

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(z_1 + z_2) &= \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ -b_1 - b_2 & a_1 + a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{pmatrix} = \mathcal{A}(z_1) + \mathcal{A}(z_2), \\ \mathcal{A}(z_1 \cdot z_2) &= \begin{pmatrix} a_1 a_2 - b_1 b_2 & a_1 b_1 + a_2 b_2 \\ -(a_1 b_1 + a_2 b_2) & a_1 a_2 - b_1 b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{pmatrix} = \mathcal{A}(z_1) \cdot \mathcal{A}(z_2). \end{aligned}$$

En esta representación podemos identificar

$$\mathcal{A}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{1}, \quad \mathcal{A}(i) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{I}.$$

De esta manera a un complejo $z = a + ib$ le podemos asociar la matriz $Z = a\mathbf{1} + b\mathbb{I}$.

Consideremos aquellas matrices tales que satisfacen $a^2 + b^2 = 1$, o dicho de otra manera $\det \mathbf{A} = 1$. Denotémoslas por \mathbb{U}_r , luego $\det \mathbb{U}_r = 1$. Los \mathbb{U}_r corresponden a todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que $|z|^2 = 1$, puesto que $|z|^2 = zz^* = a^2 + b^2$ cuando z tiene la forma $z = a + ib$. Recordando la representación geométrica de los complejos $a = \cos \theta$ y $b = \sin \theta$, luego $\mathbb{U}_r = \cos \theta \mathbf{1} + \sin \theta \mathbb{I}$,

$$\mathbb{U}_r = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

la cual es una isometría propia, una rotación.

2.7. Sucesión de números complejos.

Sean $z_0, z_1, z_2, \dots, z_n$ una sucesión de números complejos, esta sucesión converge si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe un N tal que $|z_n - z_m| < \varepsilon$ para todo $n, m \geq N$. El anterior es el criterio de Cauchy de convergencia y en el caso complejo es necesario y suficiente.

Una sucesión de números complejos $z_0, z_1, z_2, \dots, z_n$ tiene como límite z si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe un N tal que $|z_n - z| < \varepsilon$ para todo $n \geq N$.

2.8. Series de números complejos.

Como definición de la convergencia de una serie compleja usaremos la convergencia de la sucesión de sumas parciales, *i.e.*

$$\sum_{i=0}^{\infty} z_i = z \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sum_{i=0}^n z_i = z. \quad (2.15)$$

El criterio necesario y suficiente de Cauchy para la convergencia de la serie se puede expresar como $\forall \varepsilon > 0 \exists N$ tal que $n, m > N \Rightarrow \left| \sum_{i=m}^n z_i \right| < \varepsilon$.

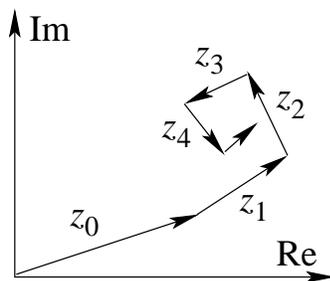


Figura 2.5: Convergencia de una serie en el plano complejo.

Definición 2.7 La serie $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu}$ converge absolutamente si $\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_{\nu}|$ converge.

Teorema 2.2 La convergencia absoluta implica la convergencia ordinaria.

2.8.1. Pruebas más comunes para la convergencia absoluta.

Teorema 2.3 Prueba de comparación. Si $|z_n| \leq a_n$ y $\sum a_n$ converge entonces $\sum z_n$ converge absolutamente.

Teorema 2.4 Prueba de la razón. Si $|z_{n+1}/z_n| \leq k \forall n$ suficientemente grande y $k < 1$, la serie $\sum z_n$ converge absolutamente.

Si $|z_{n+1}/z_n| \geq k \forall n$ suficientemente grande y $k > 1$, la serie $\sum z_n$ diverge.

Teorema 2.5 Prueba de la raíz. Si $\sqrt[n]{|z_n|} \leq k < 1 \forall n$ suficientemente grande entonces la serie $\sum z_n$ converge absolutamente.

Si $\sqrt[n]{|z_n|} > k \geq 1$ para n suficientemente grande entonces la serie $\sum z_n$ diverge.

2.8.2. Radio de convergencia.

Consideremos la serie

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu} = 1 + z^2 + z^3 + z^4 + \dots$$

- i) Para $|z| < 1$, la prueba de la razón nos da $|z^{n+1}/z^n| = |z| < 1$. Lo anterior implica que la serie $\sum z_n$ converge absolutamente para $|z| < 1$.
- ii) Para $|z| > 1$, la prueba de la razón nos da $|z^{n+1}/z^n| = |z| > 1$. Lo anterior implica que la serie $\sum z_n$ diverge para $|z| > 1$.
- iii) Para $|z| = 1$ no existe un n tal que $z^n \rightarrow 0$, por lo tanto, la serie $\sum z_n$ diverge para $|z| = 1$.

La serie $\sum z_n$ converge absolutamente dentro de una circunferencia de radio $R = 1$. Este R se llama *radio de convergencia*.

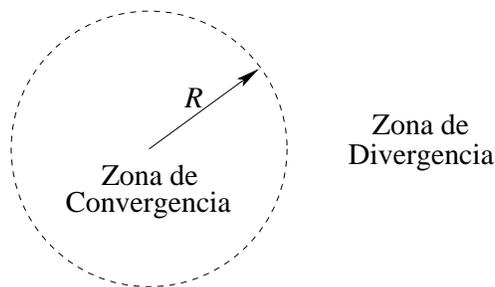


Figura 2.6: Convergencia en el plano complejo.

2.8.3. La serie exponencial.

Consideremos la serie

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^{\nu}}{\nu!} .$$

Evaluemos la prueba de la razón,

$$\left| \frac{z^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{z^n} \right| = \left| \frac{z}{n+1} \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 ,$$

converge para $|z| < \infty$.

Definición 2.8 Usamos esta serie para definir la función exponencial,

$$e^z = \exp z \equiv \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^{\nu}}{\nu!} . \quad (2.16)$$

Propiedades $\forall a, b \in \mathbb{C}$:

a)

$$\begin{aligned} e^a e^b &= \left(\sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{a^{\mu}}{\mu!} \right) \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{b^{\nu}}{\nu!} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\mu+\nu=k} \frac{a^{\mu} b^{\nu}}{\mu! \nu!} \left(\frac{k!}{k!} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\sum_{\nu=0}^k \frac{k!}{(k-\nu)! \nu!} a^{k-\nu} b^{\nu} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (a+b)^k \\ e^a e^b &= e^{(a+b)} . \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} e^{iz} &= \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots \right) + i \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots \right) \\ &= \cos(z) + i \operatorname{sen}(z) . \end{aligned}$$

2.9. Relación de Euler.

A partir de la propiedad anterior podemos escribir

$$e^{iz} = \cos z + i \operatorname{sen} z , \quad (2.17)$$

$$e^{-iz} = \cos z - i \operatorname{sen} z . \quad (2.18)$$

Podemos despejar las funciones trigonométricas en función de las exponenciales complejas

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} , \quad (2.19)$$

$$\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} . \quad (2.20)$$

Algunos valores numéricos

$$e^{i\pi} = -1 , \quad e^{2i\pi} = +1 , \quad e^{i\pi/2} = i , \quad e^{-i\pi/2} = -i .$$

La función e^z es periódica con período $2\pi i$,

$$e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z .$$

Reobtenemos algunas identidades trigonométricas usando complejos

$$\begin{aligned} \cos(a+b) &= \frac{1}{2} (e^{i(a+b)} + e^{-i(a+b)}) = \frac{1}{2} (e^{ia} e^{ib} + e^{-ia} e^{-ib}) \\ &= \frac{1}{2} [(\cos a + i \operatorname{sen} a)(\cos b + i \operatorname{sen} b) + (\cos a - i \operatorname{sen} a)(\cos b - i \operatorname{sen} b)] \\ &= \frac{1}{2} [2 \cos a \cos b - 2 \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b] \\ \cos(a+b) &= \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b , \end{aligned}$$

de la misma manera podemos demostrar que

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b .$$

Si consideremos el caso $b = -a$ tenemos la conocida identidad $1 = \cos^2 b + \operatorname{sen}^2 b$.

Si $\varphi \in \mathbb{R}$ entonces $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi$, si calculamos su módulo cuadrado

$$|e^{i\varphi}|^2 = (\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)(\cos \varphi - i \operatorname{sen} \varphi) = \cos^2 \varphi + \operatorname{sen}^2 \varphi = 1 ,$$

por lo tanto $|e^{i\varphi}| = 1$. Sabemos además, que $e^{i\varphi} = e^{i(\varphi+2\pi)}$. Podemos escribir un complejo $z = |z| e^{i\varphi}$ donde φ corresponde al ángulo polar θ en la figura 2.3.

2.10. Fórmula de Moivre.

Consideremos la exponencial compleja de n veces el ángulo φ ,

$$\begin{aligned} e^{in\varphi} &= \exp(\underbrace{i\varphi + i\varphi + i\varphi + \dots + i\varphi}_{n \text{ veces}}) \\ &= e^{i\varphi} e^{i\varphi} e^{i\varphi} \dots e^{i\varphi} = (e^{i\varphi})^n \\ &= \cos n\varphi + i \operatorname{sen} n\varphi = (\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)^n \\ &= \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} \cos^{n-\nu} \varphi \operatorname{sen}^{\nu} \varphi i^{\nu}, \end{aligned}$$

luego tenemos

$$\cos n\varphi + i \operatorname{sen} n\varphi = \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} \cos^{n-\nu} \varphi \operatorname{sen}^{\nu} \varphi i^{\nu}.$$

Comparando parte real y parte imaginaria tenemos

$$\cos n\varphi = \cos^n \varphi - \frac{n(n-1)}{2} \cos^{n-2} \varphi \operatorname{sen}^2 \varphi + \dots \quad (2.21)$$

$$\operatorname{sen} n\varphi = n \cos^{n-1} \varphi \operatorname{sen} \varphi + \dots \quad (2.22)$$

Como ejemplo de la relación anterior consideremos el caso $n = 2$,

$$\cos 2\varphi = \cos^2 \varphi - \operatorname{sen}^2 \varphi$$

$$\operatorname{sen} 2\varphi = 2 \cos \varphi \operatorname{sen} \varphi.$$

2.11. Ecuación ciclotónica.

Consideremos la siguiente ecuación en los complejos

$$z^n = 1. \quad (2.23)$$

Es decir, se busca un z tal que $|z| = 1$, ya que $|z^n| = |z|^n = 1 \Leftrightarrow |z| = 1$, y que su ángulo polar φ satisfaga $n(\varphi + 2\pi k) = 0 + 2\pi k'$. Las soluciones

$$z_k = \exp\left(\frac{2\pi ki}{n}\right), \quad \text{con } k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (2.24)$$

n	z_k
1	1
2	-1, +1
3	+1, $-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$
4	+1, -1, +i, -i
5	+1, $\exp(\pm 2i\pi/5)$, $\exp(\pm 4i\pi/5)$
6	± 1 , $\pm 1 \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$

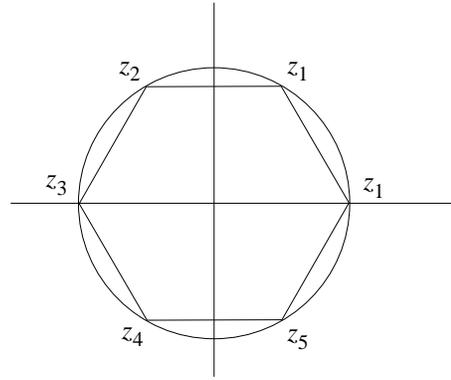


Figura 2.7: Las raíces sextas de la unidad.

La representación gráfica de las soluciones para el caso $n = 6$, figura 2.7

Las raíces de la unidad de grado n forman un grupo respecto a la multiplicación, en el cual $z_0 = 1$ corresponde al elemento neutro. A continuación la tabla de producto para el caso $n = 4$

\cdot	z_0	z_1	z_2	z_3
z_0	z_0	z_1	z_2	z_3
z_1	z_1	z_0	z_3	z_2
z_2	z_2	z_3	z_1	z_0
z_3	z_3	z_2	z_0	z_1

Capítulo 3

Ejemplos sencillos de funciones complejas

versión final 1.24, 12 de Mayo del 2003

3.1. Notación.

Las funciones complejas o mapeos van de los complejos a los complejos,

$$\mathbb{C} \xrightarrow{f} \mathbb{C} .$$

La notación es que el plano de salida lo denotaremos por Z con elementos $z = x + iy$, la imagen será el plano W con elementos $w = u + iv$. Es decir, $f(z) = f(x + iy) = w = u + iv$.

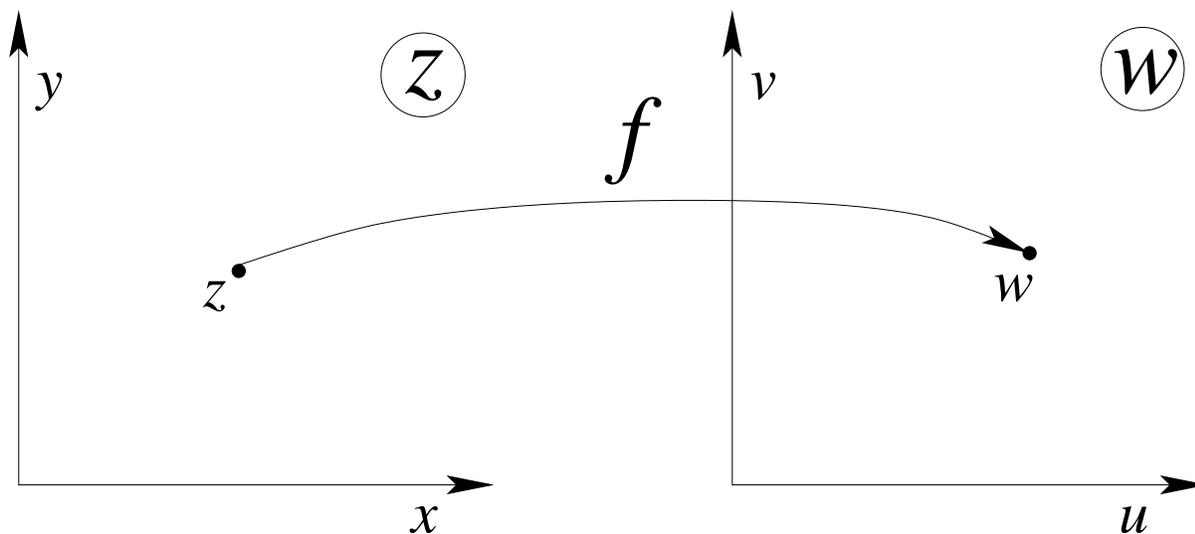


Figura 3.1: Función compleja.

3.2. Ejemplo 1, traslación.

La función traslación en un complejo constante a ,

$$z \longrightarrow f(z) = z + a .$$

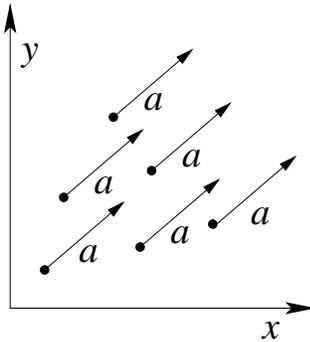


Figura 3.2: Función traslación en a .

3.3. Ejemplo 2, rotación en torno al origen.

La función rotación en torno al origen

$$z \longrightarrow f(z) = ze^{i\alpha} = u + iv = (x + iy)(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha) = x \cos \alpha - y \operatorname{sen} \alpha + i(y \cos \alpha + x \operatorname{sen} \alpha) ,$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}$. En forma matricial

$$R_\alpha z = w , \quad \text{o bien} \quad \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha \\ \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} .$$

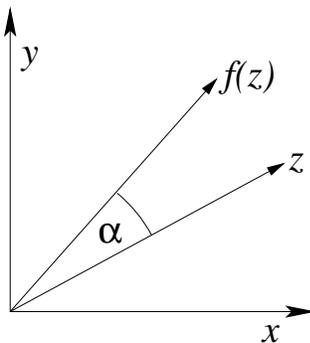


Figura 3.3: Función rotación en torno al origen.

3.4. Ejemplo 3, reflexión respecto al eje real.

La función reflexión respecto al eje real

$$z \longrightarrow f(z) = \tilde{z} = z^* .$$

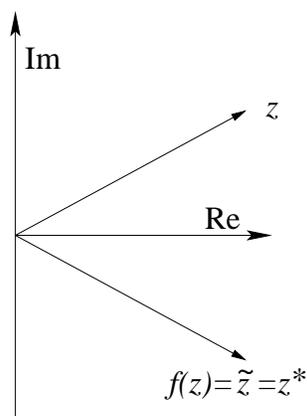


Figura 3.4: Función reflexión respecto al eje real.

Si la reflexión es respecto al eje imaginario

$$z \longrightarrow f(z) = -\tilde{z} = -z^* .$$

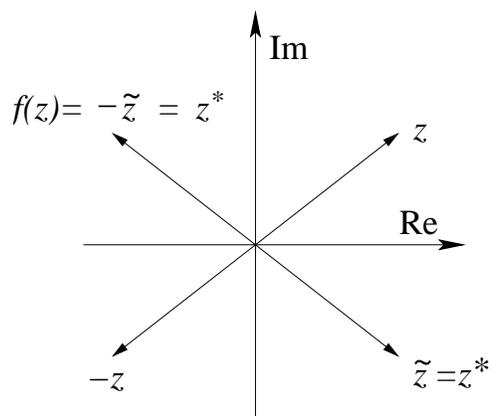


Figura 3.5: Función reflexión respecto al eje imaginario.

3.5. Ejemplo 4, rotación más traslación.

La función incluye una rotación en $a/|a|$, una multiplicación en $|a|$ y finalmente una traslación en b .

$$z \longrightarrow f(z) = az + b = |a| e^{i\alpha} z + b .$$

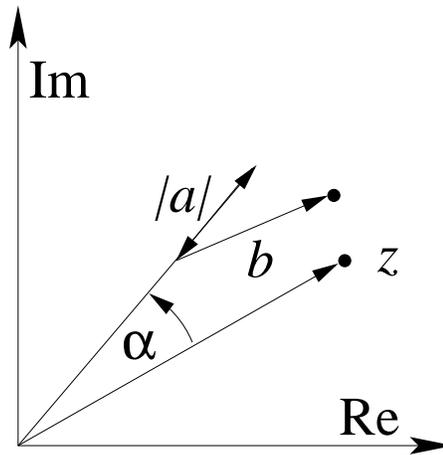


Figura 3.6: Función rotación más traslación.

Este tipo de funciones o mapeos, conocidos como *conformes*, tienen la característica de preservar los ángulos orientados. En nuestro caso, f mapeo líneas rectas en líneas rectas y circunferencias en circunferencias.

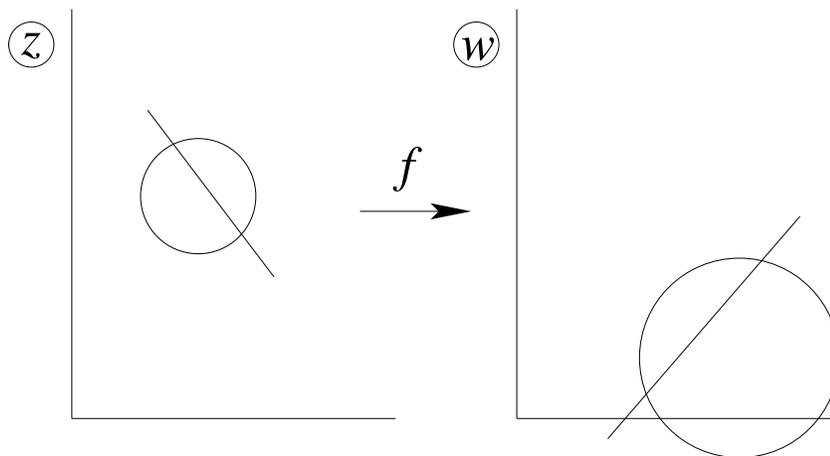


Figura 3.7: Un ejemplo que mapeo círculos en círculos y rectas en rectas.

3.6. Ejemplo 5, transformación cuadrática.

La transformación cuadrática

$$z \longrightarrow f(z) = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy = u + iv .$$

Despejando para u y v

$$\begin{aligned} u &= x^2 - y^2 , \\ v &= 2xy . \end{aligned}$$

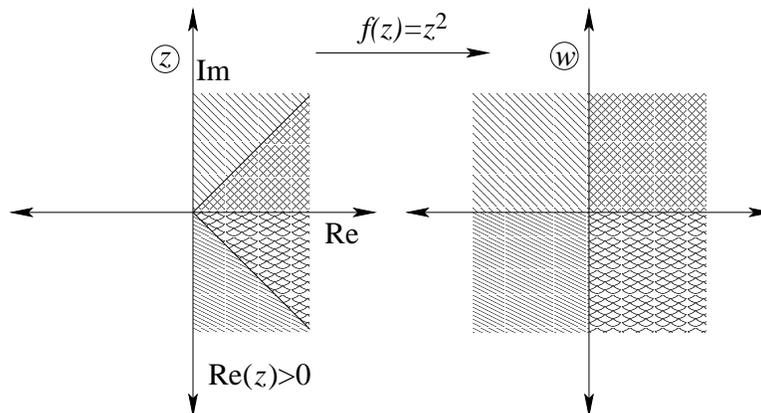


Figura 3.8: Transformación cuadrática.

Mapeo de curvas “notables”

- Verticales en z , es decir, $x = c = \text{cte}$. Representación paramétrica con parámetro y ,

$$\begin{aligned} u &= c^2 - y^2 , \\ v &= 2cy . \end{aligned}$$

Despejando $y = \frac{v}{2c}$ y reemplazándola en la primera ecuación

$$u = c^2 - \frac{v^2}{4c} .$$

- Horizontales en z , es decir, $y = c = \text{cte}$. Representación paramétrica con parámetro x ,

$$\begin{aligned} u &= x^2 - c^2 , \\ v &= 2xc . \end{aligned}$$

Despejando $x = \frac{v}{2c}$ y reemplazándola en la primera ecuación

$$u = \frac{v^2}{4c} - c^2 .$$

La función inversa, no podemos simplemente escribir $z = \sqrt{w}$ a menos que nos restrinjamos a $\text{Re } z > 0$.

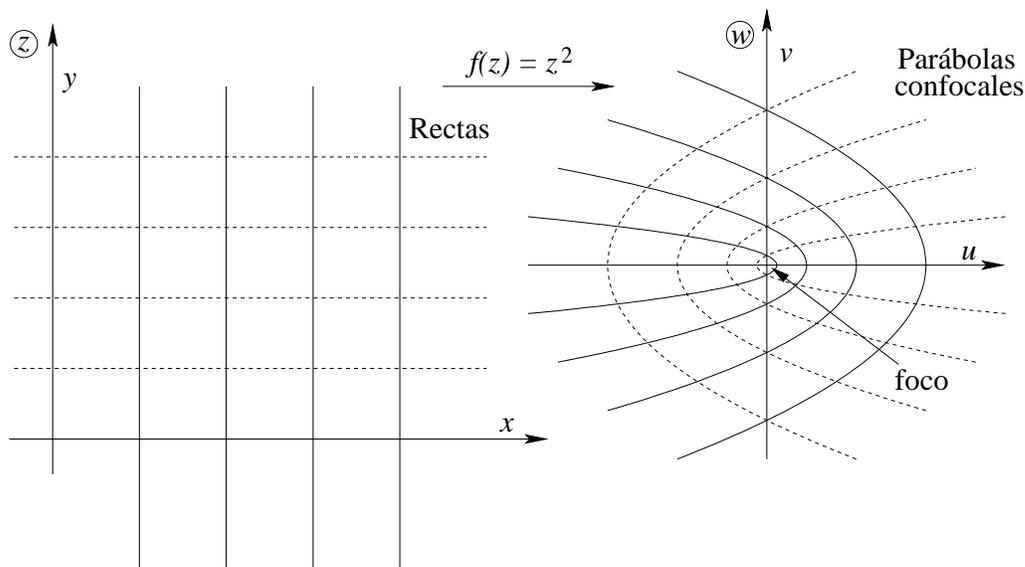


Figura 3.9: Mapeo z^2 para rectas ortogonales.

3.7. Ejemplo 6, transformación exponencial.

La transformación exponencial

$$z \longrightarrow f(z) = e^z = e^{(x+iy)} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y) = u + iv = w .$$

Despejando para u y v

$$\begin{aligned} u &= e^x \cos y , \\ v &= e^x \operatorname{sen} y . \end{aligned}$$

Mapeo de curvas “notables”

- Verticales en z , es decir, $x = c = \text{cte}$. Representación paramétrica con parámetro y , $-\pi < y < \pi$,

$$\begin{aligned} u &= e^c \cos y , \\ v &= e^c \operatorname{sen} y . \end{aligned}$$

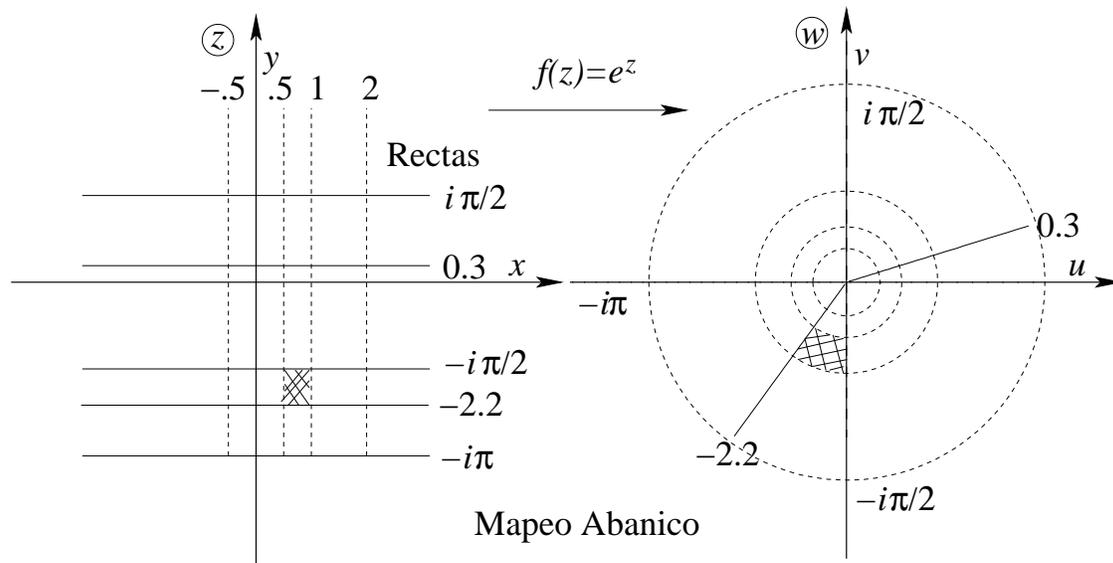
- Horizontales en z , es decir, $y = c = \text{cte}$. Representación paramétrica con parámetro x ,

$$\begin{aligned} u &= e^x \cos c , \\ v &= e^x \operatorname{sen} c . \end{aligned}$$

La función inversa de e^z , tenemos $w = e^z$ tal que $-\pi < \operatorname{Im}(e^z) \leq \pi$. Sea $w \neq 0$, escribamos $w = r e^{i\varphi}$ con $-\pi < \varphi \leq \pi$. Debemos identificar lo anterior con $e^z = e^x e^{iy}$, basta tomar $e^x = r$ e $y = \varphi$ luego $x = \ln r$ e $y = \varphi$. Por lo tanto,

$$z = \ln |w| + i\varphi = \ln w ,$$

siendo $w = |w| e^{i\varphi}$ con $-\pi < \varphi \leq \pi$.

Figura 3.10: Mapeo e^z para rectas ortogonales.

3.8. Ejemplo 7, transformación de Joukowski.

La transformación que nos interesa es

$$z \longrightarrow f(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) = u + iv = w ,$$

escribiendo $z = re^{i\varphi}$ tenemos

$$w = \frac{1}{2} \left(re^{i\varphi} + \frac{1}{r}e^{-i\varphi} \right) = u + iv ,$$

despejando para u y v

$$u = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) \cos \varphi ,$$

$$v = \frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right) \sen \varphi .$$

- Círculos en z , es decir, $r = c > 1$. Representación paramétrica con parámetro φ tal que $-\pi < \varphi \leq \pi$,

$$u = \frac{1}{2} \left(c + \frac{1}{c} \right) \cos \varphi ,$$

$$v = \frac{1}{2} \left(c - \frac{1}{c} \right) \sen \varphi .$$

Las curvas anteriores corresponden a elipses,

$$\left(\frac{2u}{c + \frac{1}{c}} \right)^2 + \left(\frac{2v}{c - \frac{1}{c}} \right)^2 = 1 .$$

- Rectas radiales en z , es decir, $\varphi = \varphi_0 \neq \pi k/2$ con $k \in \mathbb{Z}$ y $r > 1$. Representación paramétrica con parámetro $r > 1$,

$$u = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) \cos \varphi_0 ,$$

$$v = \frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right) \operatorname{sen} \varphi_0 .$$

Las curvas anteriores corresponden a hipérbolas,

$$\left(\frac{u}{\cos \varphi_0} \right)^2 - \left(\frac{v}{\operatorname{sen} \varphi_0} \right)^2 = 1 .$$

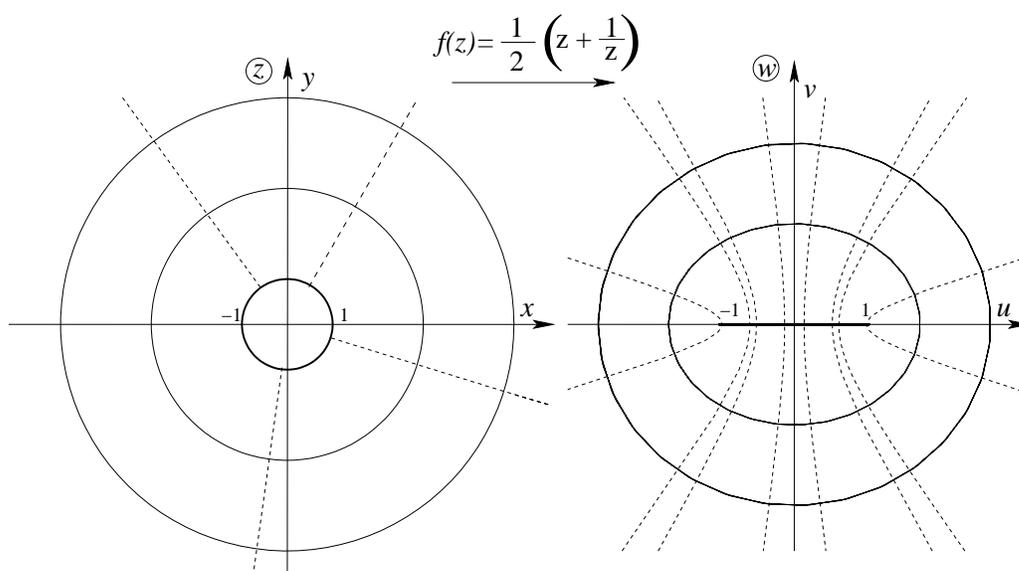


Figura 3.11: Transformación de Joukowski para círculos y rectas radiales.

3.9. Ejemplo 8, inverso.

La función inverso

$$z \longrightarrow f(z) = \frac{1}{z} , \quad f(re^{i\varphi}) = \frac{1}{|r|} e^{-i\varphi} ,$$

El origen se mapeará en infinito vía esta función e infinito se mapeará en el origen,

$$z = 0 \xrightarrow{1/z} w = \infty , \tag{3.1}$$

$$z = \infty \xrightarrow{1/z} w = 0 . \tag{3.2}$$

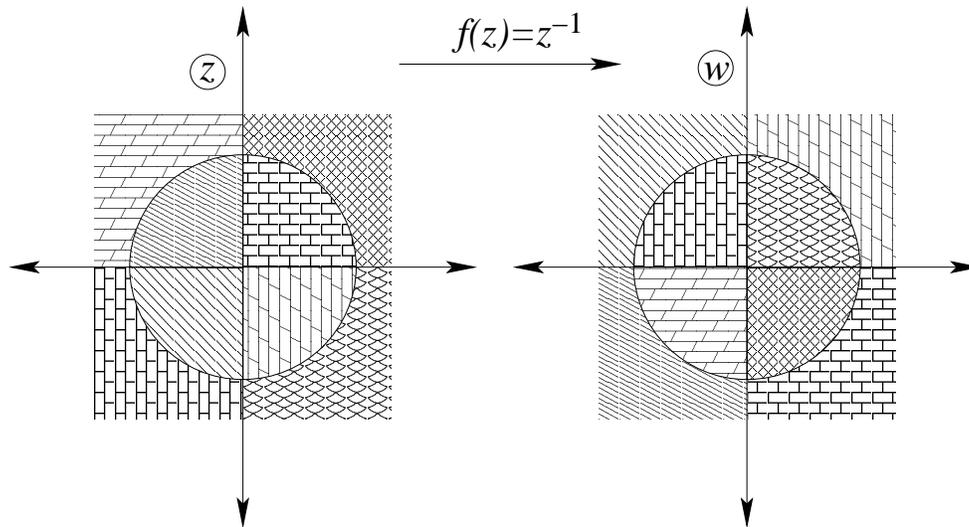


Figura 3.12: Mapeo $1/z$ para los diferentes cuadrantes.

3.10. Ejemplo 9, inverso conjugado.

La función inverso conjugado

$$z \longrightarrow f(z) = \frac{1}{z^*}, \quad f(re^{i\varphi}) = \frac{1}{|r|}e^{i\varphi},$$

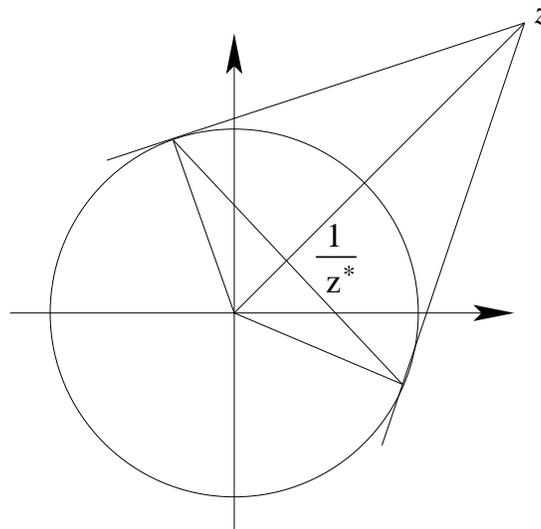


Figura 3.13: Mapeo $1/z^*$.

3.11. Mapeo sobre la esfera ζ de Riemann.

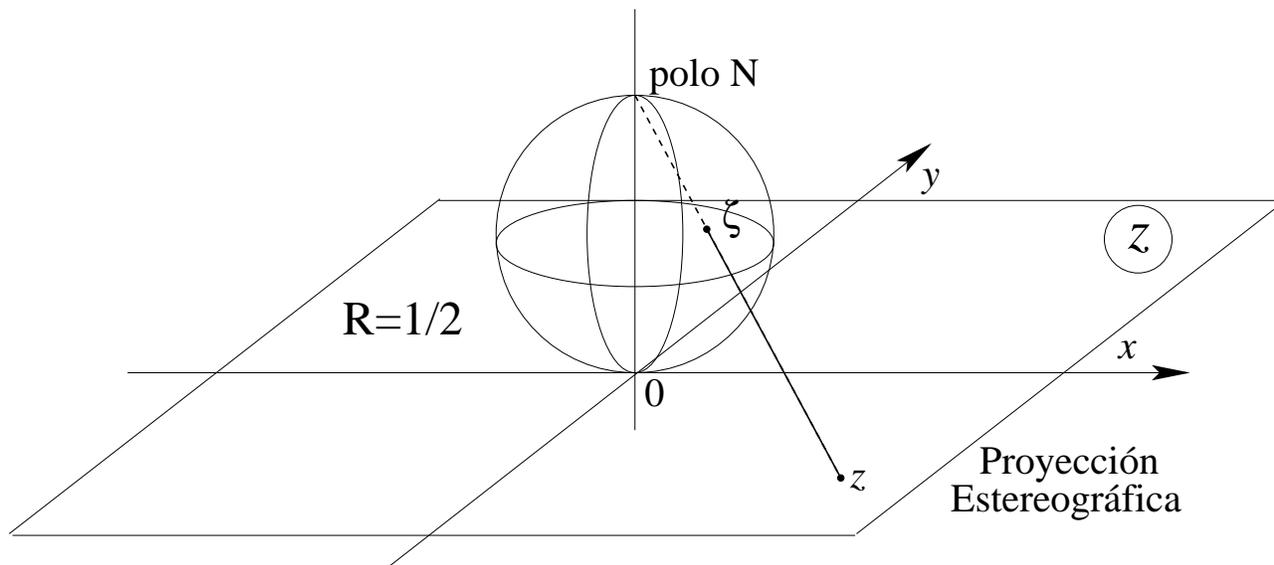


Figura 3.14: Esfera de Riemann.

Ponemos una esfera de radio $r = 1/2$ sobre el plano complejo tal que el polo sur de la esfera coincida con el origen, llamaremos a esta esfera: esfera ζ de Riemann.

A cada punto z del plano complejo z le haremos corresponder un único punto ζ sobre la esfera ζ de la siguiente manera: unimos el punto sobre el plano complejo con el extremo superior de la esfera o polo Norte por una recta y el punto que esta recta intersecta la esfera corresponderá a la imagen ζ del punto z .

Definición 3.1 *Infinito.* El punto, en el plano z , llamado infinito, $z = \infty$, es aquel cuya imagen se encuentra en el polo norte de la esfera ζ de Riemann. Es decir,

$$z = \infty \xleftrightarrow{\text{Def.}} \text{Polo N} . \quad (3.3)$$

3.11.1. Algunas propiedades de esta proyección.

1. Círculos en el plano z son mapeados sobre círculos en la esfera ζ , los cuales no pasan por el polo norte.
2. Líneas rectas en el plano z son mapeadas en circunferencias sobre la esfera ζ , los cuales pasan por el polo norte.
3. Dos rectas que se cortan en el plano z tienen dos punto comunes sobre la esfera ζ siendo uno de ellos el polo N.

La proyección estereográfica es conforme, es decir, preserva los ángulos orientados.

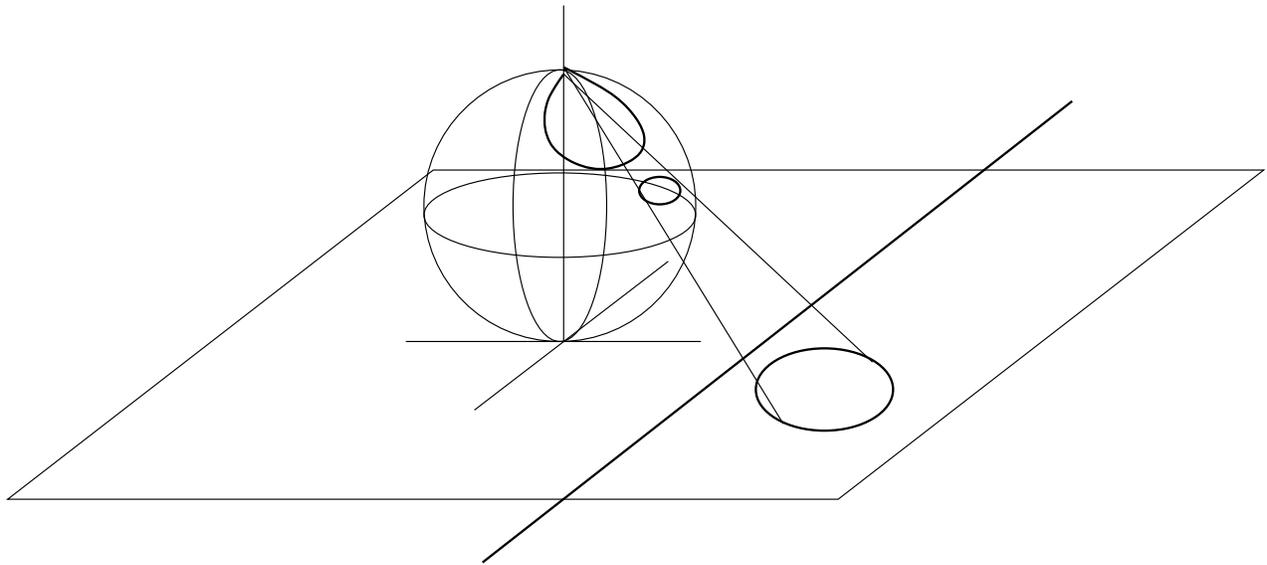


Figura 3.15: Mapeo sobre la esfera de círculos y líneas.

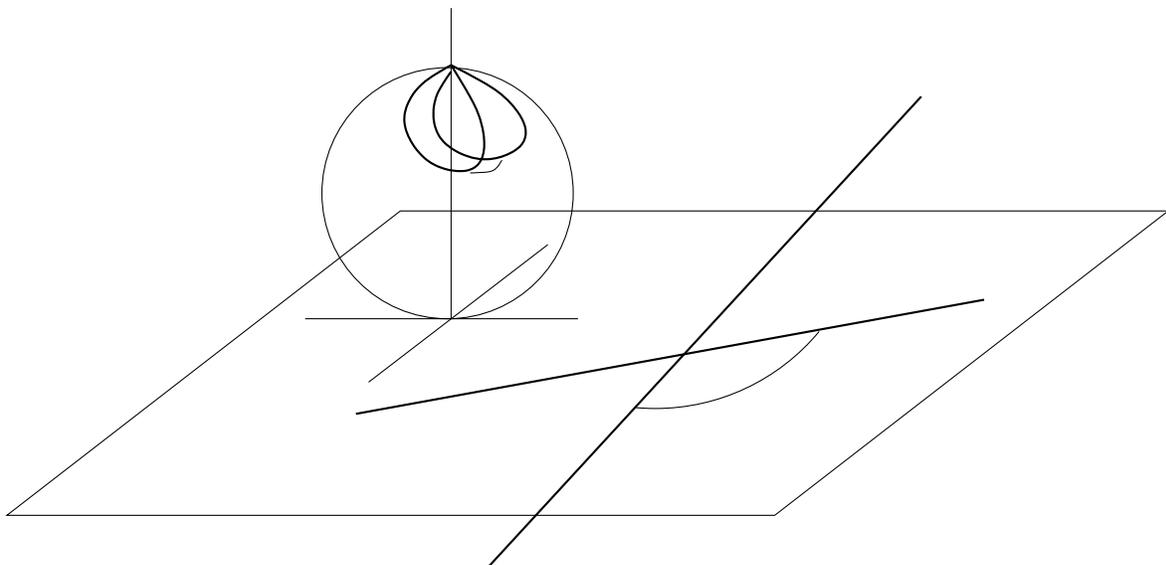


Figura 3.16: Mapeo sobre la esfera de rectas que se cruzan.

3.11.2. Mapeo de z y $1/z^*$ y su relación.

Sea A sobre la esfera ζ de Riemann el punto correspondiente a z en el plano z . Sea A' sobre la esfera ζ el punto correspondiente a $1/z^*$ en el plano z . Afirmamos que A' se obtiene de A mediante una reflexión en el plano ecuatorial, es decir, en la figura 3.17 debemos demostrar que $\alpha = \alpha'$.

Demostración Considerando que el radio es $1/2$, vemos del dibujo que $\tan \varphi = r/1 = r$.

Capítulo 4

Transformaciones homográficas y rotaciones de la esfera.

versión final 1.21, 12 de Mayo del 2003

Consideremos el espacio real de 3 dimensiones en coordenadas cartesianas. Las transformaciones *isométricas* son aquellas que conservan el producto escalar. Este tipo de transformaciones se pueden representar por matrices reales de 3×3 , que satisfacen:

$$AA^\dagger = 1, \quad \det(A) = \pm 1. \quad (4.1)$$

Si el valor del determinante corresponde a +1 decimos que la isometría es par y si corresponde a -1 diremos que es impar.

Proposición 4.1 Toda isometría par corresponde a una rotación de la esfera.

Demostración Tenemos que demostrar que existe un eje, es decir, hay dos puntos fijos o dicho de otra manera existe un vector fijo \vec{x} tal que

$$A\vec{x} = \vec{x} \implies (A - 1)\vec{x} = 0,$$

existirá una solución no trivial si y sólo si $\det(A - 1) = 0$.

$$\begin{aligned} \det(A - 1) &= \det(A - AA^\dagger) = \det(A(1 - A^\dagger)) \\ &= \det(A) \det(1 - A^\dagger) = \det(1 - A^\dagger) \\ &= \det(-1(A^\dagger - 1)) = -1 \cdot \det(A^\dagger - 1) \\ \det(A - 1) &= -\det(A - 1), \end{aligned}$$

luego $\det(A - 1) = 0$, implica que existe solución no trivial, es decir, existe el vector fijo $\vec{x} \neq 0$.

q.e.d.

Teniendo el vector fijo lo tomamos como \hat{e}_3 y completamos la base con \hat{e}_1 y \hat{e}_2 , tales que

$$\hat{e}_\nu \cdot \hat{e}_\mu = \delta_{\nu\mu}, \quad \mu, \nu = 1, 2, 3.$$

En esta nueva base la matriz A se escribe

$$\begin{pmatrix} \mathbf{B} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{donde } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\text{sen } \psi \\ \text{sen } \psi & \cos \psi \end{pmatrix}.$$

Ya que la matriz A satisface $A^\dagger = A^{-1}$ eso implica que $B^\dagger = B^{-1}$ y también tenemos que $\det(A) = \det(B) = 1$.

Consideremos ahora la transformación

$$f(z) = w = \frac{az + b}{cz + d}, \quad \text{tal que} \quad D = ad - bc \neq 0 \in \mathbb{C}. \quad (4.2)$$

La anterior es conocida como *transformación homográfica* o *transformación lineal fraccionada*.

Representación:

$$\begin{pmatrix} w \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{tal que} \quad \frac{w}{1} = \frac{az + b}{cz + d}. \quad (4.3)$$

La matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ es no singular, es decir, tiene inversa, $\frac{1}{D} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Las transformaciones homográficas forman un grupo respecto a su composición funcional.

Escribamos la matriz como producto de matrices, lo cual nos permitirá entender cómo mapea las rectas y las circunferencias,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{c} \begin{pmatrix} -D & a \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

la primera matriz del lado derecho corresponde a la transformación $t \rightarrow (-Dt + a)/c$, la segunda a $s \rightarrow 1/s$ y la tercera $z \rightarrow cz + d$. La primera y la tercera de las transformaciones no cambia la forma de las curvas y la segunda transforma circunferencias o rectas en circunferencias o rectas. Claramente, después de este análisis, vemos que la transformación mantiene la geometría, de ahí su nombre de homográfica.

Existen dos puntos notables en una transformación homográfica

$$f(z) = w = \frac{az + b}{cz + d},$$

1. El punto $z = -d/c$, que corresponde a la pre-imagen de $w = \infty$.
2. El punto $z = \infty$ se mapea en el punto $w = a/c$.

Definición 4.1 *Punto fijo.* Punto fijo de una transformación es aquel cuya imagen el mismo punto. Es decir, z_0 punto fijo de $f \Leftrightarrow f(z_0) = z_0$.

Proposición 4.2 A lo sumo en una aplicación homográfica hay dos puntos fijos, sino es la transformación identidad.

Demostración Debemos separar nuestro análisis en dos casos distintos

1. Infinito no es punto fijo, es decir, $z_0 \neq -\frac{d}{c}$, por lo tanto

$$z_0 = \frac{az_0 + b}{cz_0 + d} \iff cz_0^2 + (d - a)z_0 - b = 0.$$

En principio hay dos soluciones. Para que haya más de dos soluciones $c = 0$ y $d = a$, lo que implica $b = 0$, por lo tanto, la matriz asociada a la transformación es $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = a1$.

2. Infinito es punto fijo, es decir, $c = 0$, luego

$$z_0 = \frac{az_0 + b}{d} \iff (d - a)z_0 - b = 0 .$$

Para que haya más de una solución $d = a$ lo que implica $b = 0$, por lo tanto, la matriz asociada a la transformación es $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = a1$.

q.e.d.

Proposición 4.3 Si describimos tres puntos en el plano complejo $z_1 \neq z_2 \neq z_3 \neq z_1$ y sus respectivas imágenes $w_1 \neq w_2 \neq w_3 \neq w_1$, entonces existe exactamente una transformación homográfica f tal que $f(z_i) = w_i$ para $i = 1, 2, 3$.

Demostración Construimos la razón cruzada invariante

$$\frac{w - w_1}{w - w_3} : \frac{w_2 - w_1}{w_2 - w_3} = \frac{z - z_1}{z - z_3} : \frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_3} \implies f(z) = w . \quad (4.4)$$

La transformación f así construida es homográfica y satisface que para

$$\begin{aligned} z = z_1 &\implies w = w_1 , && \text{porque } 0 = 0, \\ z = z_2 &\implies w = w_2 , && \text{porque } 1 = 1, \\ z = z_3 &\implies w = w_3 , && \text{porque } \infty = \infty . \end{aligned}$$

Falta probar que f es única, para esto supongamos que existe una transformación homográfica g tal que

$$g(z_\nu) = w_\nu , \quad \text{para } \nu = 1, 2, 3.$$

Por ser g homográfica tiene inversa g^{-1} , luego

$$g^{-1}(w_\nu) = z_\nu = g^{-1}(f(z_\nu)) = g^{-1} \circ f(z_\nu) = z_\nu , \quad \text{para } \nu = 1, 2, 3.$$

Tenemos una transformación homográfica $g^{-1} \circ f$ con tres puntos fijos, luego la transformación es la identidad $g^{-1} \circ f = 1$ o bien $g^{-1} = f^{-1}$ lo que implica finalmente que $g = f$, es decir f es única.

q.e.d.

Consideremos las transformaciones homográficas de la forma

$$f(z) = \frac{az + b}{-b^*z + a^*} . \quad (4.5)$$

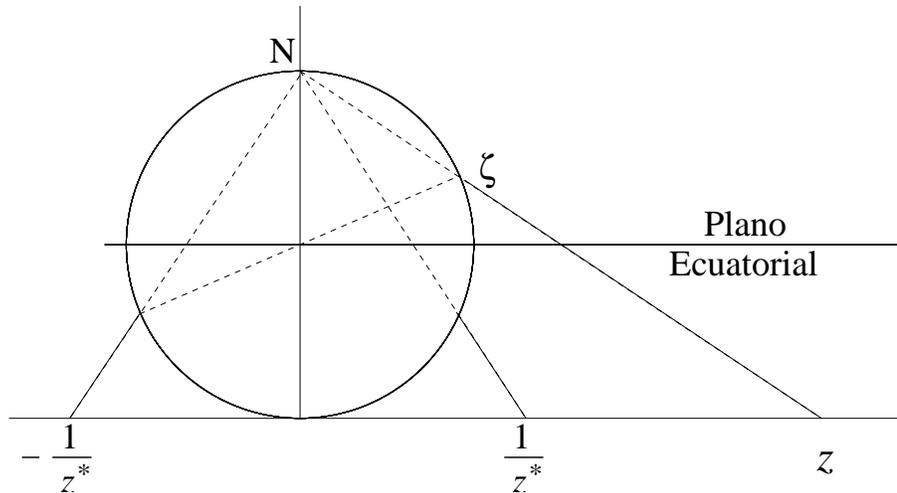


Figura 4.1: Puntos diametralmente opuestos en la esfera.

Proposición 4.4 Las transformaciones homográficas del tipo (4.5) corresponden exactamente a todas las rotaciones de la esfera.

Demostración Una rotación transforma puntos diametralmente opuestos en puntos diametralmente opuestos.

El par de puntos $(z, -1/z^*)$ son puntos diametralmente opuestos sobre la esfera.

Sea z_0 tal que $f(z_0) = w_0 = \frac{az_0 + b}{-b^*z_0 + a^*}$, evaluemos

$$f\left(-\frac{1}{z_0^*}\right) = \frac{-\frac{a}{z_0^*} + b}{\frac{b^*}{z_0} + a^*} = \frac{bz_0^* - a}{a^*z_0^* + b^*} = -\left(\frac{-b^*z_0 + a^*}{az_0 + b}\right)^* = -\left(\frac{1}{w_0}\right)^* = -\frac{1}{w_0^*}.$$

Ahora veamos si podemos prescribir un eje frente a esta transformación. Sea z_1 el eje prescrito, encontremos a y b

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ 1 \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} z_1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

lo que implica dos ecuaciones para a y b

$$\begin{aligned} az_1 + b &= Kz_1, \\ a - bz_1^* &= K^*. \end{aligned}$$

El determinante de los coeficientes es $D = -|z|^2 - 1 \neq 0$, luego tiene soluciones para cualquier K . El par de puntos que define el eje puede ser descrito $(z_1, -1/z_1^*)$.

Tratemos de prescribir un ángulo de rotación con los parámetros que tenemos,

$$f(z) = \frac{az + b}{-b^*z + a^*}, \quad D = |a|^2 + |b|^2 > 0,$$

normalicemos los coeficientes tal que el determinante sea 1.

$$f(z) = \frac{\frac{a}{\sqrt{D}}z + \frac{b}{\sqrt{D}}}{-\frac{b^*}{\sqrt{D}}z + \frac{a^*}{\sqrt{D}}} = \frac{Az + B}{-B^*z + A} \quad D = |A|^2 + |B|^2 = 1 .$$

Cada uno de los coeficientes A y B son complejos, por lo tanto, tienen dos parámetros reales. En total cuatro parámetros menos la restricción de que el determinante sea +1, tenemos entonces tres parámetros, dos para el eje y uno para el ángulo.

q.e.d.

Capítulo 5

Derivabilidad.

versión final 1.11, 12 de Mayo del 2003

5.1. Identidades de Cauchy-Riemann.

Definición 5.1 La vecindad circular de un punto z_0 con radio $\rho \in \mathbb{R}$ es el conjunto de todos los puntos tales que

$$0 < |z - z_0| < \rho. \quad (5.1)$$

Definición 5.2 Dominio abierto es aquel en que todos elementos tiene alguna vecindad circular que pertenece totalmente al dominio.

Consideraremos funciones definidas en un dominio abierto de ahora en adelante.

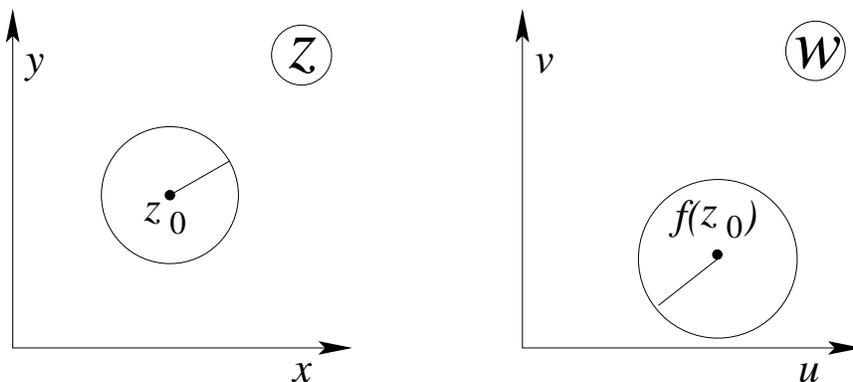


Figura 5.1: Funciones en dominios abiertos.

Definición 5.3 Continuidad.

La función f es continua en el punto z_0 si $f(z_0 + h) = f(z_0) + R$, donde $R \rightarrow 0$ cuando $h \rightarrow 0$.

Definición 5.4 Diferenciabilidad.

La función f es derivable en z_0 si

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + Ah + R, \quad \text{donde } \frac{R}{h} \rightarrow 0 \text{ cuando } h \rightarrow 0, \quad (5.2)$$

en tal caso

$$\frac{\Delta f}{h} = \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = A + \frac{R}{h}.$$

Notación:

$$A = f'(z_0) \quad \text{derivada de } f \text{ en } z = z_0.$$

Si escribimos $f(z+h) \approx Ah + B$, la podemos interpretar como un giro en un ángulo polar de A , más una translación y una dilatación. Lo anterior implica la conservación de ángulos orientados, representación conforme.

Veamos un ejemplo explícito, la derivada de $f(z) = |z|^2$ evaluada en $z = z_0$,

$$\begin{aligned} |z_0 + h|^2 &= |z_0|^2 + Ah + R \\ (z_0 + h)(z_0 + h)^* &= z_0 z_0^* + Ah + R \\ z_0 h^* + h z_0^* + h h^* &= Ah + R \\ \frac{R}{h} &= z_0 \frac{h^*}{h} + z_0^* + h^* - A. \end{aligned}$$

Podemos tomar h como queramos, en particular lo elegimos primero real puro,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{R}{h} = z_0 + z_0^* + h - A = 2 \operatorname{Re} z_0 - A = 0 \implies A = 2 \operatorname{Re} z_0.$$

Sea h imaginario puro, es decir, $h = i\alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{R}{i\alpha} = -z_0 + z_0^* - i\alpha - A = -2i \operatorname{Im} z_0 - A = 0 \implies A = -2i \operatorname{Im} z_0.$$

Combinando ambos resultados,

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} z_0 &= -2i \operatorname{Im} z_0 \\ \operatorname{Re} z_0 + i \operatorname{Im} z_0 &= 0 \implies z_0 = 0. \end{aligned}$$

La derivada existe sólo en $z_0 = 0$.

Nos está permitido escribir

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y). \quad (5.3)$$

Tomemos $z_0 = x_0 + iy_0$ donde f es derivable. Sea $h = \Delta x + i\Delta y$, ahora evaluemos $\Delta f/h$,

$$\frac{\Delta f}{h} = \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0) + iv(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - iv(x_0, y_0)}{\Delta x + i\Delta y}.$$

Al punto z_0 podemos acercarnos en forma arbitraria en el plano z .

Primero $\Delta y = 0$, $\begin{array}{ccc} & z_0 & \\ & \cdot & \\ \longrightarrow & & \longleftarrow \end{array}$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0) + iv(x_0 + \Delta x, y_0) - iv(x_0, y_0)}{\Delta x},$$

luego para $\Delta x = h \rightarrow 0$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = f'(z) . \quad (5.4)$$

Ahora $\Delta x = 0$, \downarrow
 \cdot z_0
 \uparrow

$$\frac{\Delta f}{i\Delta y} = \frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0 + \Delta y) - iv(x_0, y_0)}{i\Delta y} ,$$

luego para $\Delta y = h \rightarrow 0$

$$\frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} = f'(z) . \quad (5.5)$$

Ambas ecuaciones, (5.4) y (5.5), se debe ser iguales, lo que significa que: cumplir

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} , \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}} . \quad (5.6)$$

Las ecuaciones anteriores son conocidas como las identidades de Cauchy-Riemann y es la condición necesaria para la existencia de la derivada. Investiguemos la suficiencia de ellas para la derivabilidad, tenemos $u = u(x, y)$ tal que

$$\Delta u = u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0) = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y ,$$

donde $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow 0$ si $h = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \rightarrow 0$.

Análogamente

$$\Delta v = v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y + \varepsilon_3 \Delta x + \varepsilon_4 \Delta y ,$$

donde $\varepsilon_3, \varepsilon_4 \rightarrow 0$ si $h = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \rightarrow 0$.

Luego, como la derivada es una operación lineal

$$\begin{aligned} \Delta f &= \Delta u + i\Delta v = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y + i \left(\frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y + \varepsilon_3 \Delta x + \varepsilon_4 \Delta y \right) \\ &\stackrel{\text{C.R.}}{=} \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x - \frac{\partial v}{\partial x} \Delta y + i \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + i \frac{\partial u}{\partial x} \Delta y + (\varepsilon_1 + \varepsilon_3) \Delta x + (\varepsilon_2 + \varepsilon_4) \Delta y \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} (\Delta x + i\Delta y) + i \frac{\partial v}{\partial x} (\Delta x + i\Delta y) + \delta_1 \Delta x + \delta_2 \Delta y \\ \frac{\Delta f}{\Delta z} &= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} + \delta_1 \frac{\Delta x}{\Delta z} + \delta_2 \frac{\Delta y}{\Delta z} . \end{aligned}$$

Tomemos el límite $\Delta z \rightarrow 0$

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} + \delta_1 \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta z} + \delta_2 \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta z} ,$$

como se satisface que $|\Delta x| \leq |\Delta z|$ y $|\Delta y| \leq |\Delta z|$ ambos límites van a cero quedándonos

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} ,$$

f' existe en z_0 , donde se satisface Cauchy-Riemann.

5.2. Ecuaciones de Laplace.

Sea $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ derivable tal que u, v tengan derivadas de segundo orden continuas

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \stackrel{\text{C.R.}}{=} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) \stackrel{\text{C.R.}}{=} -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \implies \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (5.7)$$

análogamente

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \stackrel{\text{C.R.}}{=} -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \stackrel{\text{C.R.}}{=} -\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \implies \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0. \quad (5.8)$$

Ambas ecuaciones, (5.7) y (5.8), corresponden a una ecuación de Laplace bidimensional para u y v respectivamente.

Notemos que $|f'| = |A|$ corresponde a una dilatación lineal, $|f'|^2$ corresponde a una dilatación de área

$$|f'|^2 = f' f'^* = \left(\frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial v}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \stackrel{\text{C.R.}}{=} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)},$$

el cual corresponde al Jacobiano de la transformación $(x, y) \rightarrow (u, v)$.

Definición 5.5 La función $f(z)$ es holomorfa en un dominio si en tal dominio existe $f'(z)$.

Definición 5.6 La función $f(z)$ es analítica si se puede expandir en serie de potencia.

Definición 5.7 Una función $u(x, y)$ es armónica si satisface que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (5.9)$$

Definición 5.8 La función $f(z)$ es entera si es analítica en todo el plano z .

Teorema 5.1 Si $u(x, y)$ es armónica entonces se puede construir f holomorfa.

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Demostración Se busca $v(x, y)$ tal que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Para que sea integrable se debe satisfacer

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right),$$

y puesto que v debe satisfacer Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = -\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right),$$

Y esto es cierto por hipótesis, u es armónica, lo cual implica que v existe y por lo tanto f es holomorfa.

q.e.d.

Ejemplo Sea $u = y^3 - 3x^2y$, probemos primero que esta función es armónica

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -6y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6y.$$

Determinemos v ,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -6xy,$$

usando Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = -6xy \implies v(x, y) = -3xy^2 + \phi(x),$$

con $\phi(x)$ arbitraria. Ahora bien,

$$\frac{\partial v}{\partial x} \stackrel{\text{C.R.}}{=} -\frac{\partial u}{\partial y} = -3y^2 + 3x^2 = -3y^2 + \phi'(x),$$

lo que implica una ecuación para $\phi(x)$,

$$\phi'(x) = 3x^2 \implies \phi(x) = x^3 + C.$$

De lo anterior determinamos $v(x, y) = -3xy^2 + x^3 + C$, por lo tanto, f es holomorfa:

$$f(z) = y^3 - 3x^2y + i(x^3 - 3xy^2) + C = iz^3 + c.$$

Ejemplo Consideremos $f(z) = z^* = x - iy = u + iv$ luego $u(x, y) = x$ y $v(x, y) = -y$, si evaluamos sus derivadas

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -1,$$

claramente no satisface Cauchy-Riemann luego no existe f' .

Ejemplo Consideremos $f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = u + iv$ luego $u(x, y) = x^2 - y^2$ y $v(x, y) = 2xy$, si evaluamos sus derivadas

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 2x, & \frac{\partial v}{\partial x} &= 2y, \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= 2x, & \frac{\partial u}{\partial y} &= -2y, \end{aligned}$$

por lo tanto, $f'(z)$ existe. Evaluémosla

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = 2x + i2y = 2z.$$

Ejemplo Sea $f(z) = z^n$ para $n = 1, 2, 3, \dots$ evaluemos su derivada

$$\frac{\Delta f}{h} = \frac{(z_0 + h)^n - z_0^n}{h} = \frac{\binom{n}{1}(z_0 + h)^{n-1}h + \mathcal{O}(h^2)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \binom{n}{1}(z_0 + h)^{n-1},$$

es decir,

$$\boxed{f'(z) = (z^n)' = nz^{n-1}}. \quad (5.10)$$

Cualquier polinomio o función racional es derivable

$$\begin{aligned} e^z &= 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots, \\ (e^z)' &= 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots = e^z. \end{aligned} \quad (5.11)$$

La derivada de las funciones trigonométricas

$$\begin{aligned} (\operatorname{sen} z)' &= \cos z, \\ (\operatorname{cos} z)' &= -\operatorname{sen} z. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Si definimos las funciones hiperbólicas mediante las series

$$\begin{aligned} \operatorname{cosh} z &\equiv 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots, \\ \operatorname{senh} z &\equiv \frac{z}{1!} + \frac{z^3}{3!} + \dots. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Su relación con las funciones trigonométricas

$$\begin{aligned} \operatorname{cosh} iz = \cos z &\implies \cos iz = \operatorname{cosh} z, \\ \operatorname{senh} iz = i \operatorname{sen} z &\implies \operatorname{sen} iz = i \operatorname{senh} z. \end{aligned} \quad (5.14)$$

La derivada de las funciones hiperbólicas,

$$\begin{aligned} (\operatorname{senh} z)' &= \operatorname{cosh} z, \\ (\operatorname{cosh} z)' &= \operatorname{senh} z. \end{aligned} \quad (5.15)$$

La derivada de la función logaritmo,

$$(\ln z)' = \frac{1}{z}. \quad (5.16)$$

La transformación de Joukowski,

$$f(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \quad (5.17)$$

su derivada

$$(f(z))' = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{z^2} \right). \quad (5.18)$$

La derivada es distinta de cero en todos los puntos salvo en $z = \pm 1$.

Proposición 5.1 Si $\varphi' = \psi'$ entonces $\varphi(z) = \psi(z) + \text{cte}$.

Demostración Consideremos $f = \varphi - \psi = u + iv$ su derivada $f' = 0$ luego $\frac{\partial u}{\partial x} = 0 = \frac{\partial u}{\partial y}$. Por lo tanto, $u(x, y) = \text{cte} = c_1$ y $v(x, y) = \text{cte} = c_2$ implica $u + iv = \text{cte}$ lo que finalmente significa que $\varphi(z) = \psi(z) + \text{cte}$.

q.e.d.

5.3. Interpretación hidrodinámica de las identidades de Cauchy-Riemann.

Premisa: Sea $f(z) = u + iv$ holomorfa implica $f^*(z) = u - iv$.

Definición 5.9 El campo de velocidades asociado a $f(z)$ es vía su función conjugada

$$f^*(z) \longrightarrow \vec{q} = \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}. \quad (5.19)$$

El campo es solenoidal e irrotacional

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{q} &= \frac{\partial q_1}{\partial x} - \frac{\partial q_2}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \stackrel{\text{C.R.}}{=} 0, \\ \vec{\nabla} \times \vec{q} &= \left(\frac{\partial q_1}{\partial y} - \frac{\partial q_2}{\partial x} \right) \hat{k} = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \stackrel{\text{C.R.}}{=} 0. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Teorema 5.2 Si $f = u + iv$ tiene primitiva $F = U + iV$ en cierta región del plano entonces cada línea de flujo satisface

$$V(x, y) = \text{cte}. \quad (5.21)$$

Demostración Consideremos el movimiento de una partícula durante un intervalo Δt con velocidad $\vec{q} = \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix}$

$$(x_0, y_0) \nearrow (x_0 + u\Delta t, y_0 - v\Delta t) + \mathcal{O}(\Delta t^2)$$

tenemos

$$F'(z) = \frac{\partial V}{\partial y} + i \frac{\partial V}{\partial x} = f(x, y) = u + iv,$$

luego

$$\frac{\partial V}{\partial y} = u, \quad \frac{\partial V}{\partial x} = v.$$

Ahora bien,

$$\Delta V = V(x_0 + u\Delta t, y_0 - v\Delta t) - V(x_0, y_0) \approx \frac{\partial V}{\partial x} u\Delta t + \frac{\partial V}{\partial y} (-v)\Delta t = vu\Delta t - uv\Delta t = 0,$$

lo cual implica que $V = \text{cte}$ en la línea de flujo.

q.e.d.

Ejemplo Sea $f(z) = \frac{1}{z}$ luego

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{z^*}{z \cdot z^*} = \frac{x}{r^2} - i \frac{y}{r^2}.$$

Para \vec{q} elegimos

$$q_1 = \frac{x}{r^2} = \frac{\cos \varphi}{r}, \quad q_2 = \frac{y}{r^2} = \frac{\text{sen } \varphi}{r}.$$

La primitiva de $f(z) = \frac{1}{z}$

$$F(z) = \ln z = \ln |z| + i\varphi,$$

luego

$$\text{Im } F(z) = \text{cte.} \implies \varphi = \text{cte.}$$

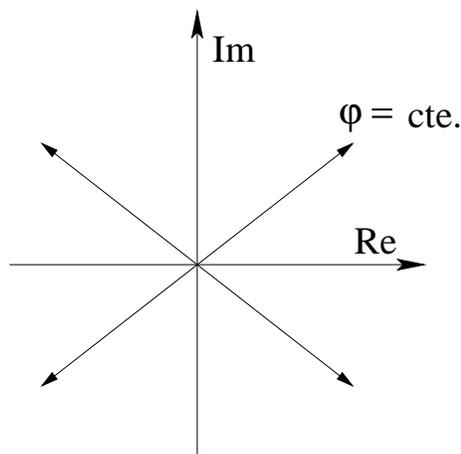


Figura 5.2: $\text{Im}F(z) = \varphi = \text{cte.}$

Ejemplo Sea $f(z) = \frac{i}{z}$ luego

$$f(z) = \frac{i}{z} = \frac{y}{r^2} + i \frac{x}{r^2}.$$

Para \vec{q} elegimos

$$q_1 = \frac{y}{r^2} = \frac{\text{sen } \varphi}{r}, \quad q_2 = -\frac{x}{r^2} = -\frac{\cos \varphi}{r}.$$

La primitiva de $f(z) = \frac{i}{z}$

$$F(z) = i \ln z = i \ln |z| - \varphi ,$$

luego

$$\text{Im } F(z) = \text{cte.} \implies \ln r = \text{cte.} \implies r = \text{cte.}$$

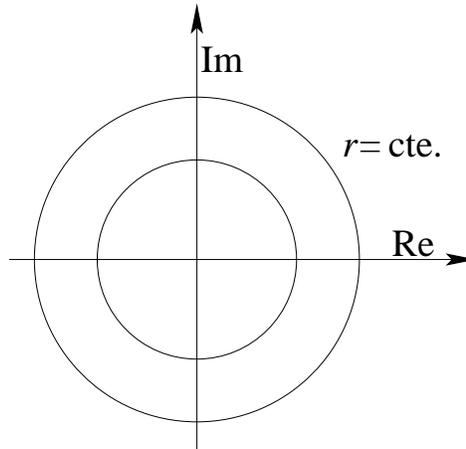


Figura 5.3: $\text{Imag}F(z) = \ln r = \text{cte.}$

5.4. Familias ortogonales.

Sea $f(z)$ holomorfa en una región,

$$f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y) .$$

Consideremos las familias de curvas

$$u(x, y) = \alpha , \quad v(x, y) = \beta , \quad \text{con } \alpha \text{ y } \beta \in \mathbb{R} .$$

Variando α y β se obtienen las distintas familias.

Proposición 5.2 Estas familias de curvas son ortogonales, es decir, cada miembro de una familia es ortogonal a cada miembro de la otra familia en el punto de intersección.

Demostración

Consideremos $u(x, y) = \alpha_1$ y $v(x, y) = \beta_1$ arbitrarias. Tenemos que $du = 0 = dv$, luego la pendiente de la curva $u(x, y) = \alpha_1$ definida como p_{α_1} la podemos evaluar a partir de

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0 \implies \frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y}} = p_{\alpha_1} .$$

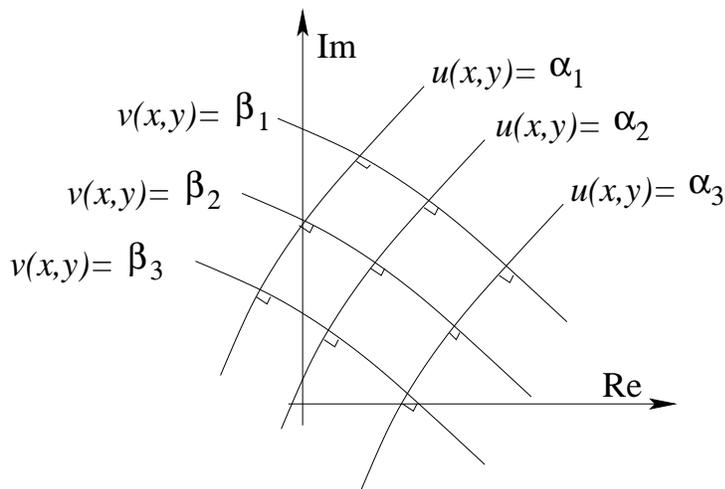


Figura 5.4: Familias de curvas ortogonales.

Análogamente la pendiente de la curva $v(x, y) = \beta_1$ definida por p_{β_1}

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0 \implies \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{\frac{\partial v}{\partial y}} = p_{\beta_1} .$$

Luego multiplicando ambas y usando Cauchy-Riemann

$$p_{\alpha_1} \cdot p_{\beta_1} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y}} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x}}{-\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y}} = -1 .$$

Las curvas son ortogonales en los puntos de intersección.

q.e.d.

Capítulo 6

Integración.

versión final 1.1, 26 de Mayo del 2003

6.1. Definiciones

Sea $\varphi(t) = \varphi_1(t) + i\varphi_2(t)$ una función continua de la variable real t , con $t_1 \leq t \leq t_2$, y $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{R}$.

Definición 6.1

$$\int_{t_1}^{t_2} \varphi(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \varphi_1(t) dt + i \int_{t_1}^{t_2} \varphi_2(t) dt .$$

Definición 6.2 Curva Γ orientada, seccionalmente lisa

$$z = \varphi(t) \iff \begin{cases} x &= \varphi_1(t) \\ y &= \varphi_2(t) \end{cases} , \quad t_1 \leq t \leq t_2 \text{ y } (\varphi_1')^2 + (\varphi_2')^2 > 0.$$

Si $\varphi_1'(t), \varphi_2'(t)$ son continuas en el intervalo $t_1 \leq t \leq t_2$ la curva es lisa en tal intervalo.

Una curva seccionalmente lisa es aquella que admite “saltos finitos” una cantidad finita de veces, discontinuidades de la función $\varphi(t)$.

Orientación:

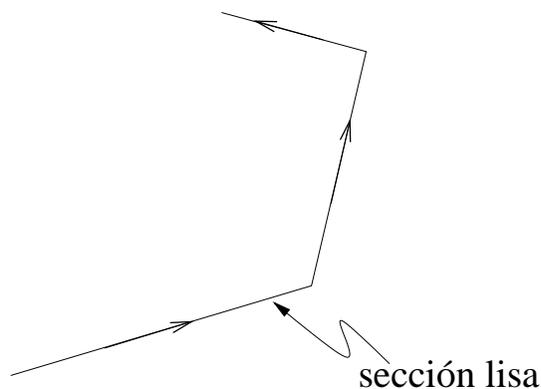
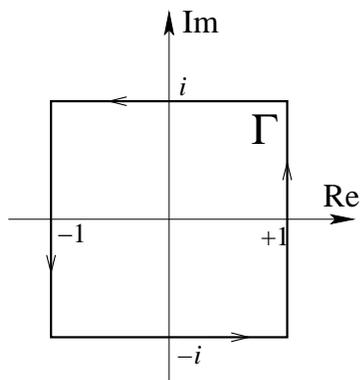


Figura 6.1: Curva seccionalmente lisa y orientada.

Se admite cambio de parámetro $t = \chi(\tau) > 0$ con $\chi'(\tau) > 0$:

$$\varphi(t) = \varphi(\chi(\tau)) = \psi(\tau) ,$$

el intervalo $t_1 \leq t \leq t_2$ corresponde al intervalo $\tau_1 \leq \tau \leq \tau_2$ tal que $t_1 = \chi(\tau_1)$ y $t_2 = \chi(\tau_2)$.



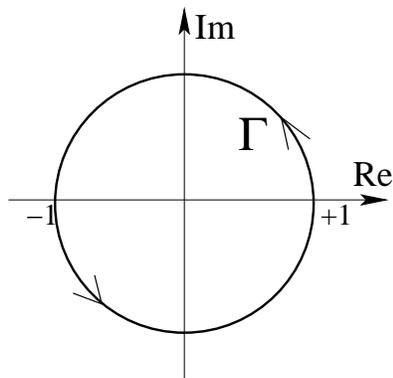
Ejemplo Representación paramétrica de la curva orientada Γ , un cuadrado, $z = \varphi(t)$

$$z = \begin{cases} (-1 + t) - i & 0 \leq t \leq 2 \\ 1 + i(t - 3) & 2 \leq t \leq 4 \\ (5 - t) + i & 4 \leq t \leq 6 \\ -1 + i(7 - t) & 6 \leq t \leq 8 \end{cases}$$

Para cambiar la orientación hacemos $t \longrightarrow -t$.

Figura 6.2: Curva parametrizada.

Ejemplo Representación paramétrica de la curva orientada Γ , una circunferencia, mediante la función $z = \varphi(t)$



$$z = \cos \tau + i \operatorname{sen} \tau = e^{i\tau} ,$$

con $-\pi \leq \tau \leq \pi$. Aquí la curva está recorrida en el sentido contrario a las agujas del reloj, tal sentido lo consideraremos como el positivo.

Figura 6.3: Otra curva parametrizada.

Definición 6.3 Curva cerrada sin puntos dobles es una curva parametrizada por $\varphi(t)$ tal que si $t_\lambda \neq t_\mu \implies \varphi(t_\lambda) \neq \varphi(t_\mu)$, salvo en el lugar de la partida y de la llegada.

Las curvas Γ se encuentran incrustadas en regiones. Estas pueden ser dominios abiertos.

Definición 6.4 Dominio simplemente conexo. Es un dominio abierto tal que toda curva cerrada en él encierra sólo puntos del dominio.

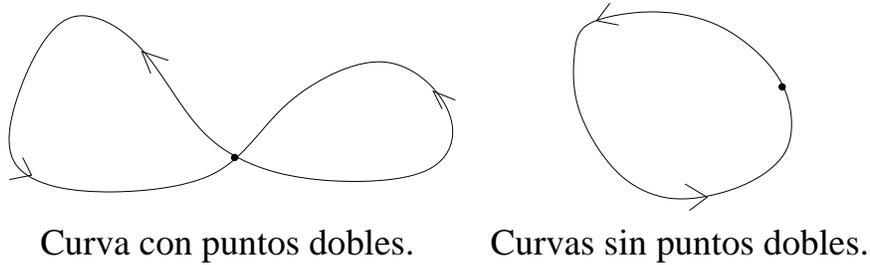


Figura 6.4: Curva con y sin puntos dobles.

Una forma equivalente de definir un dominio simplemente conexo es decir que toda curva cerrada se puede contraer de manera continua a un punto del dominio.

Ejemplo Consideremos la región $|z| < 2$. Claramente es un dominio simplemente conexo, la curva que dibujamos puede contraerse de manera continua a un punto del dominio.

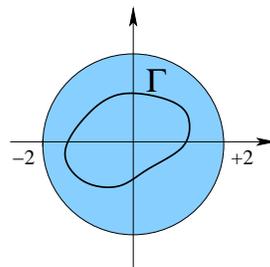


Figura 6.5: Dominio simplemente conexo.

Pero no todos los dominios tendrán esta propiedad. Podemos construir dominios que no sean simplemente conexos, veamos el siguiente ejemplo en que claramente la curva que dibujaremos sobre la región no puede contraerse a un punto del dominio.

Ejemplo Consideremos el dominio definido por $0.95 < |z| < 2$. Claramente este no es un dominio simplemente conexo.

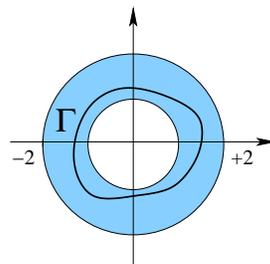


Figura 6.6: Dominio no simplemente conexo.

Los dominios simplemente conexos no tienen “lagunas”. Por otro lado tenemos los dominios múltiplemente conexos como por ejemplo el de la figura 6.7.

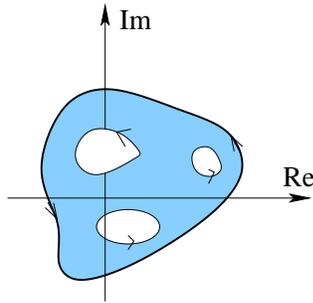


Figura 6.7: Dominio múltiplemente conexo.

6.2. Interior de una curva cerrada sin puntos dobles.

a) Interior definido y descrito por tres desigualdades lineales.

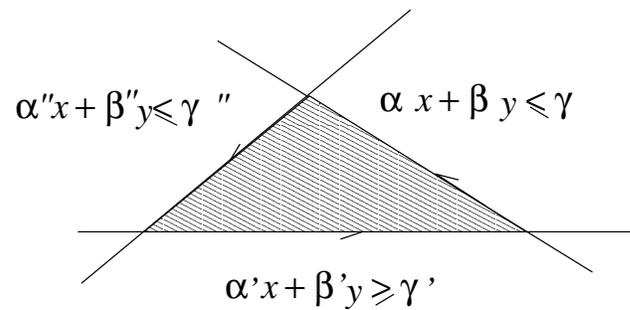


Figura 6.8: Interior de curva I.

b) Interior descrito por cinco desigualdades lineales.

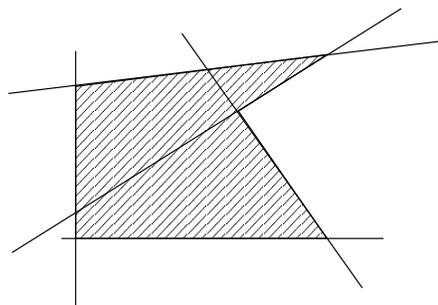


Figura 6.9: Interior de curva II.

c) Interior definido por aproximación poligonal.

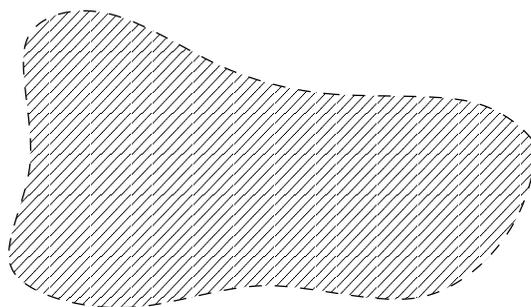


Figura 6.10: Interior de curva III.

Una curva cerrada sin puntos dobles tiene un interior bien definido.

Definición 6.5 *Curva de Jordan es una curva lisa y cerrada, sin puntos dobles, puede o no puede tener longitud finita.*

Teorema 6.1 Teorema de Jordan. (Sin dem.)

Toda curva Γ de Jordan, y por lo tanto, todo contorno cerrado, separa el plano en dos dominios los cuales tienen a los puntos Γ como únicos puntos de bordes. Uno de estos dominios, llamado interior de Γ , es acotado y el otro, llamado el exterior de Γ , es no acotado.

6.3. Recorrido del contorno de un dominio.

Curva orientada: en cada lugar de la curva el conjunto de vectores tangenciales está subordinado en una clase positiva y una clase negativa. Definida la clase positiva la curva está orientada.

Situaciones:

1. Considere el triángulo de la figura

Los dos vectores que definen los dos lados del triángulo de la figura 6.11, son $\vec{a} = (a_1, a_2)$ y $\vec{b} = (b_1, b_2)$. Si evaluamos el área orientada A del triángulo:

$$\frac{(|\vec{a} \times \vec{b}|)}{2} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_2 & b_1 \end{vmatrix} = \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{2}.$$

Si esta área resulta positiva se dice que el contorno recorrido en el sentido de \vec{a} , \vec{b} tienen orientación positiva. Los vectores \vec{a} , \vec{b} definen un recorrido del contorno:

$$\begin{aligned} &\text{Recorrido positivo si } \det(\vec{a}, \vec{b}) > 0, \\ &\text{Recorrido negativo si } \det(\vec{a}, \vec{b}) < 0. \end{aligned}$$

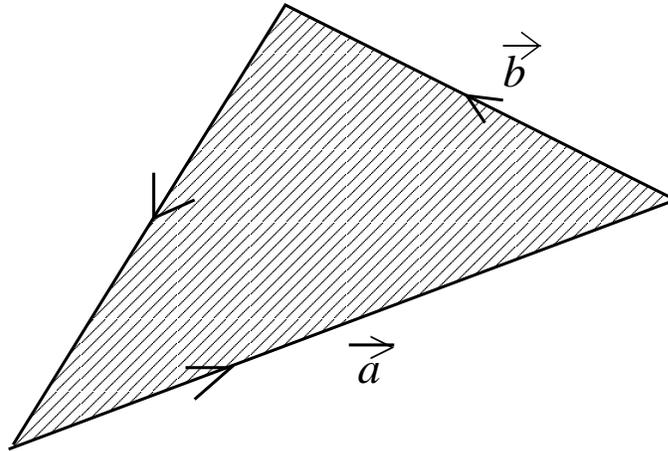


Figura 6.11: Triángulo.

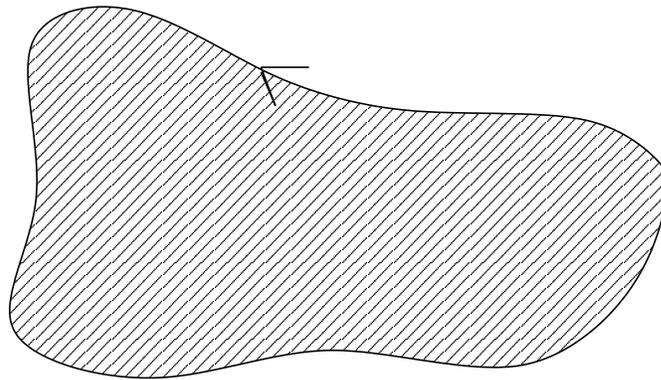


Figura 6.12: Curva cerrada.

2. Considerar una curva cerrada sin puntos dobles (fig. 6.12), $x = x(t)$ e $y = y(t)$.

Si

$$\text{Área incluida} = \frac{1}{2} \oint \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = \begin{cases} > 0 & \text{recorrido positivo} \\ < 0 & \text{recorrido negativo} \end{cases}$$

3. Si consideramos el polígono

Es el mismo caso que la situación 2.

Ejemplo Consideremos la curva $z = e^{it}$ con $-\pi \leq t \leq \pi$, el área es:

$$\text{Área incluida} = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \begin{vmatrix} \cos t & -\text{sen } t \\ \text{sen } t & \cos t \end{vmatrix} dt = \pi > 0,$$

luego la curva cerrada \bigcirc tiene recorrido positivo.

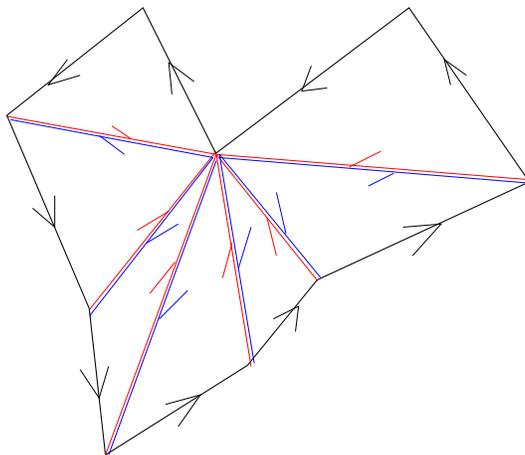


Figura 6.13: Polígono.

Notemos el cambio de orientación al sustituir $t \rightarrow -t$, se tiene $z = e^{-it}$ con $\pi \leq t \leq -\pi$

$$\text{Área incluida} = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \begin{vmatrix} \cos t & -\text{sen } t \\ -\text{sen } t & -\cos t \end{vmatrix} dt = -\pi < 0 ,$$

en este caso la curva cerrada \bigcirc tiene orientación negativa.

También podemos cambiar la orientación al recorrerla al revés,

$$\text{Área incluida} = \frac{1}{2} \int_{+\pi}^{-\pi} \begin{vmatrix} \cos t & \text{sen } t \\ \text{sen } t & \cos t \end{vmatrix} dt = -\pi < 0 .$$

6.4. Integrales de línea en el plano complejo.

Sea f continua definida en cierta región

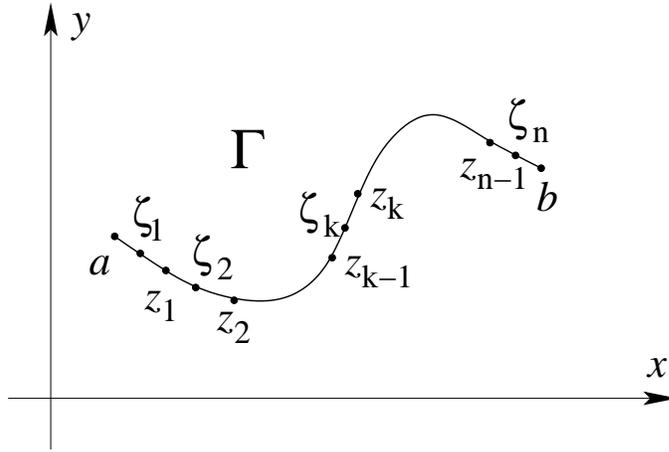
Definición 6.6 La integral de línea de la función f entre los puntos a y b a través de la curva Γ , fig. 6.14, queda definida por

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{\nu} f(\zeta_{\nu}) \cdot \Delta z_{\nu} ,$$

donde $\Delta \rightarrow 0$ significa que subdividimos cada vez más fino el camino.

Definición 6.7 La integral de línea de la función f entre los puntos a y b a través de la curva Γ parametrizada por la función $\varphi(t)$, queda definida por

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} f(\varphi_1(t) + i\varphi_2(t)) (\varphi_1'(t) + i\varphi_2'(t)) dt ,$$

Figura 6.14: Camino Γ en el plano complejo.

donde $\varphi'(t) = d\varphi(t)/dt$. Esta definición es invariante a un cambio de parámetro, en efecto sea $t = \chi(\tau)$

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(\varphi(\chi(\tau)))\varphi'(\chi(\tau))\chi'(\tau) d\tau = \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(\psi(\tau))\psi'(\tau) d\tau ,$$

donde hemos definido $\psi(\tau) = \varphi(\chi(\tau))$.

Proposición 6.1

$$\left| \int_{\Gamma} f \right| \leq L \text{Máx}_{\Gamma} |f| , \quad (6.1)$$

donde L es la longitud de la curva y $\text{Máx}_{\Gamma} |f|$ es el máximo del módulo de la función sobre la curva Γ .

Demostración

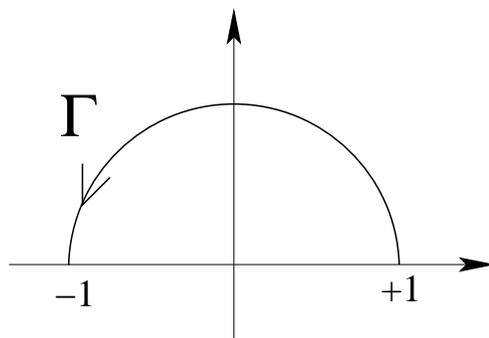
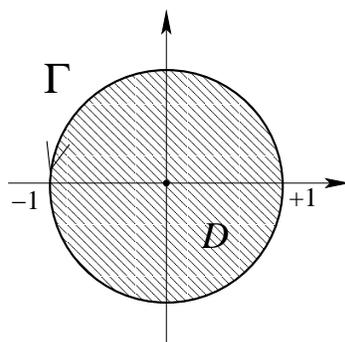
$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma} f \right| &= \lim \left| \sum_{\nu} f(\zeta_{\nu})\Delta z_{\nu} \right| \leq \lim \sum_{\nu} |f(\zeta_{\nu})\Delta z_{\nu}| \\ &\leq \lim \sum_{\nu} \Delta z_{\nu} \text{Máx}_{\Gamma} |f| \\ &\leq L \text{Máx}_{\Gamma} |f| . \end{aligned}$$

q.e.d.

Ejemplo

La curva Γ puede ser parametrizada por $z = e^{it}$ con $0 \leq t \leq \pi$. Integremos $f(z) = z^2$ sobre Γ . Como $z = e^{it}$ entonces $z^2 = e^{2it}$ y $dz = ie^{it}dt$.

$$\int_{\Gamma} z^2 dz = \int_0^{\pi} e^{2it} i e^{it} dt = i \int_0^{\pi} e^{3it} dt = i \left[\frac{1}{3i} e^{3it} \right]_0^{\pi} = \frac{1}{3} (e^{3i\pi} - e^0) = \frac{1}{3} (-1 - 1) = -\frac{2}{3} .$$

Figura 6.15: Camino Γ .Figura 6.16: Camino cerrado Γ .

Ejemplo La curva Γ (fig. 6.16), puede ser parametrizada por $z = e^{it}$ con $-\pi \leq t \leq \pi$. Integremos $f(z) = 1/z$ sobre Γ . Notemos que D no es un dominio de conexión simple para $1/z$. Como $z = e^{it}$ entonces $1/z = e^{-it}$ y $dz = ie^{it}dt$.

$$\oint_{\Gamma} \frac{1}{z} dz = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-it} ie^{it} dt = i \int_{-\pi}^{\pi} dt = 2\pi i = 2\pi i \times \text{coef. de } \frac{1}{z}.$$

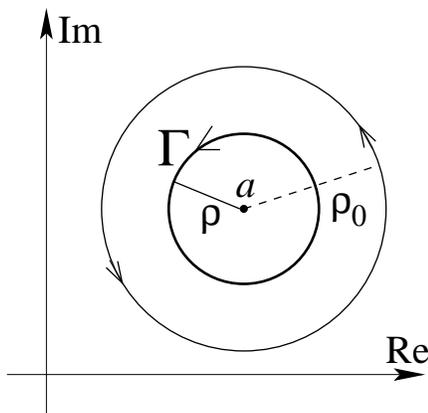
Ejemplo Consideremos la curva Γ (fig. 6.17), cuya representación paramétrica es $z = a + e^{it}$ con $-\pi \leq t \leq \pi$.

Como $z = \varphi(t) = a + e^{it}$ entonces $\frac{dz}{dt} = \varphi'(t) = ie^{it}$. Integremos la función $f(z) = \frac{1}{z-a}$ sobre esta curva Γ :

$$\oint_{|z-a|=\rho=1} \frac{dz}{z-a} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{ie^{it} dt}{e^{it}} = 2\pi i = 2\pi i \times \text{coef. de } \frac{1}{z-a}.$$

Notemos que este resultado vale para toda curva Γ , círculo, centrada en a no importando el radio ρ . Si consideramos como Γ el círculo de radio ρ_0 la integral queda

$$\oint_{|z-a|=\rho_0} \frac{dz}{z-a} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{i\rho_0 e^{it} dt}{\rho_0 e^{it}} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{ie^{it} dt}{e^{it}} = 2\pi i.$$

Figura 6.17: Camino cerrado Γ .

Proposición 6.2 Sea f holomorfa en cierto dominio **simplemente conexo**. Sea F la primitiva, entonces la integral

$$\int_a^b f(z) dz = F(b) - F(a), \quad (6.2)$$

es independiente del camino Γ .

Demostración

$$\int_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dF(\varphi(t))}{dt} = [F(\varphi(t))]_{t_1}^{t_2} = F(\varphi(t_2)) - F(\varphi(t_1)) = F(b) - F(a).$$

q.e.d.

Consecuencia: En tales circunstancias se tiene $\oint f = 0$.

Ejemplo Integremos $f(z) = z^2$ en el camino cerrado, fig. 6.16. La curva Γ puede ser parametrizada por $z = e^{it}$, con $-\pi \leq t \leq \pi$.

$$\oint_{\Gamma} z^2 dz = \int_{-\pi}^{\pi} e^{2it} i e^{it} dt = i \int_{-\pi}^{\pi} e^{3it} dt = i \left[\frac{1}{3i} e^{3it} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{3} (e^{3i\pi} - e^{-3i\pi}) = \frac{1}{3} (-1 - -1) = 0.$$

Usando la primitiva

$$\oint_{\Gamma} z^2 dz = \left[\frac{z^3}{3} \right]_{-1}^{-1} = \frac{-1}{3} - \frac{-1}{3} = 0.$$

Teorema 6.2 Teorema de Cauchy. (Sin dem.)

Sea f holomorfa en un dominio de conexión simple D y Γ una curva cerrada dentro de D , entonces

$$\oint_{\Gamma} f = 0 . \quad (6.3)$$

Notemos que

$$\int_a^b f(z) dz = \int_a^b (u + iv) \left(\frac{dx}{dt} + i \frac{dy}{dt} \right) dt ,$$

donde $u = u(x(t), y(t))$ y $v(x(t), y(t))$. La invariancia frente a un cambio de parámetro permite simplificar el dt .

$$\int_a^b f(z) dz = \int_a^b (udx - vdy) + i \int_a^b (udy + vdx) ,$$

donde las condiciones de integrabilidad son:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} .}$$

Premisas:

1. Conexión simple.
2. Condición de integrabilidad.
3. Continuidad de las derivadas parciales.

Todo lo anterior implica **independencia del camino**.

Proposición 6.3 Si f es continua en D (de conexión simple) y si la integral

$$\int_a^z f(z') dz' = F(z) ,$$

es independiente del camino, entonces existe $F' = f$.

Demostración

$$F(z_0+h) - F(z_0) = \int_a^{z_0+h} f(\zeta) d\zeta - \int_a^{z_0} f(\zeta) d\zeta = \int_{z_0}^{z_0+h} f(\zeta) d\zeta = hf(z_0) + \int_{z_0}^{z_0+h} R(\zeta) d\zeta ,$$

con $R(\zeta) = f(\zeta) - f(z_0)$. Acotemos el último término de la derecha

$$\left| \int_{z_0}^{z_0+h} R(\zeta) d\zeta \right| \leq h \cdot \text{Máx} |R| .$$

Luego

$$\frac{F(z_0+h) - F(z_0)}{h} = f(z_0) + \eta ,$$

donde η

$$\eta = \frac{\left| \int_{z_0}^{z_0+h} R(\zeta) d\zeta \right|}{h} \leq \text{Máx} |R| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0,$$

por lo tanto $\eta \rightarrow 0$ si $h \rightarrow 0$.

q.e.d.

6.5. Evaluación de integrales impropias reales.

Damos por conocida la integral

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \quad (6.4)$$

Se buscan las integrales de $\cos(x^2)$ y $\sin(x^2)$:

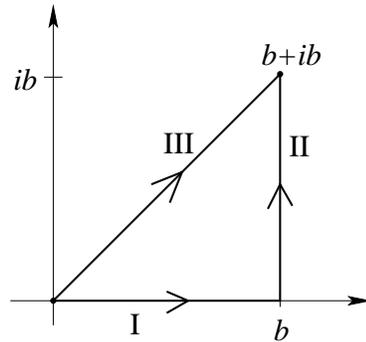


Figura 6.18: Camino cerrado Γ .

Evaluaremos

$$\int_0^{b+ib} \exp(-z^2) dz,$$

sobre diferentes caminos.

Notemos que

$$\int_I e^{-z^2} dz = \int_0^b e^{-x^2} dx \xrightarrow{b \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \quad (6.5)$$

Además,

$$\int_{III} = \int_I + \int_{II}. \quad (6.6)$$

Afirmamos que la integral sobre la curva III es despreciable. Demostración: sea $z = b + it$ con $0 \leq t \leq b$ y $dz/dt = i$ luego

$$\int_{II} e^{-z^2} dz = i \int_0^b \exp(-(b+it)^2) dt = i \int_0^b e^{t^2-b^2} e^{-2ibt} dt,$$

notemos que $t^2 \leq bt \implies e^{t^2} \leq e^{bt}$, se tiene

$$\left| \int_{II} e^{-z^2} dz \right| \leq \int_0^b \left| e^{t^2} e^{-b^2} \right| |e^{-2ibt}| dt \leq e^{-b^2} \int_0^b e^{bt} dt = e^{-b^2} \left. \frac{e^{bt}}{b} \right|_0^b = e^{-b^2} \left(\frac{e^{-b^2} - 1}{b} \right) \xrightarrow{b \rightarrow \infty} 0. \quad (6.7)$$

Consideremos ahora la curva III, la parametrización $z = (1+i)\tau$ con $0 \leq \tau \leq b$ y $\frac{dz}{dt} = 1+i$, además notemos que $(1+i)^2 = 2i$, tal que $e^{-z^2} = e^{-2i\tau^2}$. Luego

$$\int_{III} e^{-z^2} dz = (1+i) \int_0^b (\cos 2\tau^2 - i \sin 2\tau^2) d\tau = \int_0^b (\cos 2\tau^2 + \sin 2\tau^2) d\tau + i \int_0^b (\cos 2\tau^2 - \sin 2\tau^2) d\tau. \quad (6.8)$$

Luego en el límite $b \rightarrow \infty$ y usando (6.5), (6.6), (6.7), (6.8) tenemos que

$$\int_{III} e^{-z^2} dz = \int_0^\infty (\cos 2\tau^2 + \sin 2\tau^2) d\tau + i \int_0^\infty (\cos 2\tau^2 - \sin 2\tau^2) d\tau = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad (6.9)$$

el resultado es real, luego la parte imaginaria se anula por lo tanto

$$\int_0^\infty \cos 2\tau^2 d\tau = \int_0^\infty \sin 2\tau^2 d\tau. \quad (6.10)$$

usando (6.9) y (6.10) tenemos

$$2 \int_0^\infty \cos 2\tau^2 d\tau = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad (6.11)$$

haciendo el cambio de variable $2\tau^2 = x^2$ tal que $4\tau d\tau = 2x dx$ de manera tal que $d\tau = \frac{\sqrt{2}}{2} dx$ y reemplazando en (6.11)

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^\infty \cos x^2 dx = \frac{1}{4} \sqrt{\pi},$$

finalmente

$$\boxed{\int_0^\infty \cos x^2 dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}} \quad (6.12)$$

conocida como la *Integral de Fresnel*.

6.6. Fórmula integral de Cauchy.

Proposición 6.4 Sea Γ una curva cerrada sin puntos dobles y de orientación positiva, incrustada en un dominio D de conexión simple, en el cual f es holomorfa, y sea a un punto de D , entonces

$$\boxed{f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz} \quad (6.13)$$

Lo anterior muestra que el valor de una función que es holomorfa en una región está determinado en toda la región por el valor que toma en los bordes.

Demostración La integral es

$$\oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz = \oint_{\Gamma} \frac{f(a)}{z-a} dz + \oint_{\Gamma} \frac{f(z) - f(a)}{z-a} dz$$

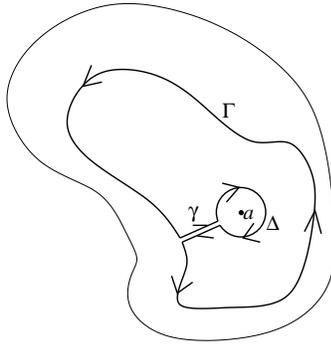


Figura 6.19: Camino Γ .

El dominio es de conexión simple, luego

$$\oint_{\Gamma} + \int_{\gamma} + \int_{\Delta} = 0, \quad (6.14)$$

la segunda integral se anula resultando

$$\oint_{\Gamma} = - \int_{\Delta} = \oint_{\Delta}. \quad (6.15)$$

Tenemos de esta manera

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-a} &= \oint_{\Delta} \frac{f(a)}{z-a} dz + \oint_{\Delta} \frac{f(z) - f(a)}{z-a} dz \\ &= f(a)2\pi i + \oint_{\Delta} \frac{f(z) - f(a)}{z-a} dz. \end{aligned}$$

Acotemos la segunda integral:

$$\left| \oint_{\Delta} \frac{f(z) - f(a)}{z-a} dz \right| \leq \oint_{\Delta} \frac{|f(z) - f(a)|}{|z-a|} dz \leq L_{\Delta} \text{Máx} \frac{|f(z) - f(a)|}{|z-a|},$$

siendo $|z - a| = \rho$ se tiene $L_{\Delta} = 2\pi\rho$. Además, tomando ρ suficientemente pequeño podemos hacer $|f(z) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2\pi}$ donde $\varepsilon > 0$ tan pequeño como se quiera luego

$$\left| \oint_{\Delta} \frac{f(z) - f(a)}{z-a} dz \right| \leq 2\pi\rho \frac{\varepsilon}{2\pi\rho} = \varepsilon.$$

Luego

$$\oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz = f(a)2\pi i \quad (6.16)$$

q.e.d.

Tenemos pues:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi-z} d\xi, \quad z \text{ punto interior de } \Gamma.$$

si derivamos

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{f(\xi)}{\xi-z} \right) d\xi = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi-z)^2} d\xi.$$

Existen f'' , f''' , ...

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}} d\xi \quad (6.17)$$

Teorema 6.3 (de Morera)

Sea f función continua en un dominio D de conexión simple. Si para todo camino cerrado arbitrario Γ , en D vale

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 0,$$

entonces f es holomorfa en D .

Demostración

$$\int_a^z f = F(z) \implies F'(z) = f \implies F'' = f', \dots$$

la primera igualdad es debido a la independencia del camino y el implica es debido a la proposición que dice que existe $F' = f$. Todo lo anterior implica f holomorfa.

q.e.d.

Capítulo 7

Series de Potencias.

versión final 1.3, 2 de Junio del 2003

7.1. Series y radio de convergencia.

Consideramos la serie infinita de potencias como el límite de las sumas parciales

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu}(z - z_0)^{\nu} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\nu=0}^n a_{\nu}(z - z_0)^{\nu} , \quad (7.1)$$

donde z_0 es el centro de expansión.

Ejemplos:

1. Una serie divergente

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu z)^{\nu} .$$

2. La serie geométrica

$$1 + z + z^2 + \dots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} = \frac{1}{1 - z} - \frac{z}{1 - z} z^n .$$

Si $|z| < 1$ el segundo término tiende a cero cuando $n \rightarrow \infty$

3. La definición de la función exponencial

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(z)^{\nu}}{\nu!} \equiv \exp(z) .$$

Converge para todo z .

4. Otra serie divergente

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \nu!(z)^{\nu} \rightarrow \infty ,$$

jamás converge.

Teorema 7.1 Sea $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu}(z)^{\nu}$ una serie que converge en ciertos puntos $z \neq 0$, pero que diverge en otros. Existe entonces un $r > 0$ tal que para $|z| < r$ la serie converge absolutamente y para $|z| > r$ la serie diverge.

Demostración Usando el criterio de la raíz, la convergencia absoluta está garantizada si $\sqrt[n]{|a_n z^n|} \leq k < 1$, desde cierto n en adelante, esto dice:

$$|z| \sqrt[n]{|a_n|} \leq k, \quad \implies \quad |z| \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1,$$

luego

$$|z| < \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \equiv r,$$

convergencia garantizada.

La divergencia se tiene si

$$|z| \sqrt[n]{|a_n|} \geq k > 1,$$

de cierto n en adelante, luego

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n z^n|} > 1, \quad \implies \quad |z| \frac{1}{r} > 1, \quad \implies \quad |z| > r.$$

La divergencia está garantizada.

q.e.d.

Sobre el borde se debe realizar un análisis caso a caso. Veamos algunos ejemplos en relación con esto:

Ejemplos:

1. $\sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu}$, no converge para $|z| = 1$.

2. $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^{\nu}}{\nu}$, el radio de convergencia es $r = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$, sobre el radio

$$z = 1 : \quad +1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots \quad \text{diverge}$$

$$z = -1 : \quad -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \dots = \log 2 \quad \text{converge}$$

3. $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^{\nu}}{\nu^2}$, el radio de convergencia es $r = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2} = 1$ converge para todo $|z| = 1$,

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots = \frac{\pi^2}{6}.$$

Esta serie funciona como mayorante convergente, ya que $\left| \frac{z^\nu}{\nu^2} \right| \leq \frac{1}{\nu^2}$ para todo $|z| \leq 1$. Por lo tanto, si $\sum_{\nu=0}^{\infty} \left| \frac{z^\nu}{\nu^2} \right|$ converge sobre el borde implica que $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^\nu}{\nu^2}$ converge absolutamente sobre el borde.

Consideremos la sucesión $\sin^n x$ para $n = 1, 2, 3, \dots$ con $0 \leq x \leq \pi$.

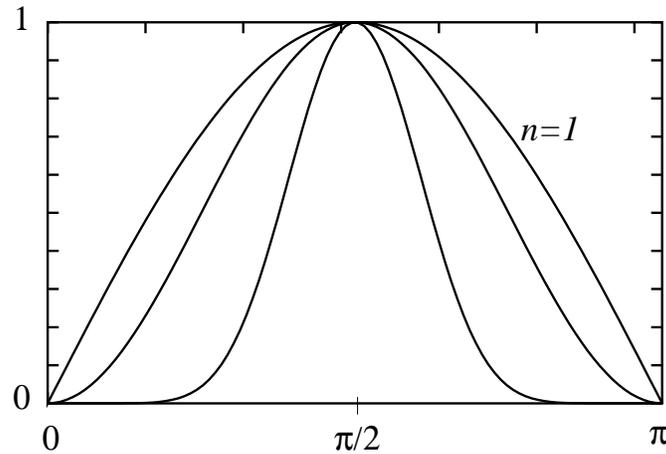


Figura 7.1: Sucesión $\sin^n x$.

Existe

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin^n x = \begin{cases} 1 & \text{si } x = \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{si } x \neq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

No existe convergencia uniforme. Es decir, la convergencia es no uniforme.

Consideremos

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) = f(z) \quad \text{para todo } z \in D. \quad (7.2)$$

La convergencia nos dice que dado un ε tan pequeño como se quiera existe un N tal que

$$\left| \sum_{\nu=n}^{n+p} f_\nu(z) \right| < \varepsilon,$$

para todo $n > N(z)$ y para todo $p \geq 0$. La convergencia es uniforme si $N(z)$ es independiente de z .

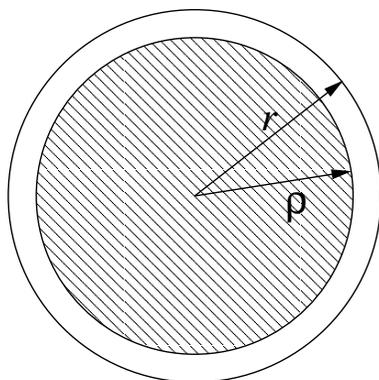
Proposición 7.1 Un criterio (o condición) suficiente para la convergencia uniforme: basta la existencia de una mayorante convergente. Si en D cada $f_\nu(z)$ cumple con $|f_\nu(z)| \leq c_\nu$, con $c_\nu \geq 0$ constantes, y si $\sum_\nu c_\nu$ converge entonces $\sum_\nu f_\nu(z)$ converge uniformemente en D .

Demostración

$$|R_n(z)| = \left| \sum_{\nu=n}^{\infty} f_{\nu}(z) \right| \leq \sum_{\nu=n}^{\infty} |f_{\nu}(z)| \leq \sum_{\nu=n}^{\infty} c_{\nu} < \varepsilon ,$$

para todo n suficientemente grande.

q.e.d.



$r =$ radio de convergencia

$\rho =$ radio de convergencia
uniforme

Figura 7.2: Radios de convergencia.

Teorema 7.2 Toda serie de potencia converge uniformemente en un círculo concéntrico a su círculo de convergencia, pero con un radio menor.

Demostración $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} z^{\nu}$ tenga radio de convergencia r . Sea $0 < \rho < r$, para $|z_1| < \rho$ se tiene

$$\left| \sum_{\nu=n}^{\infty} a_{\nu} z_1^{\nu} \right| \leq \sum_{\nu=n}^{\infty} |a_{\nu}| \rho^{\nu} < \varepsilon ,$$

para n suficientemente grande. Notemos que ε es independiente de z . La serie $\sum_{\nu=n}^{\infty} |a_{\nu}| \rho^{\nu}$ corresponde a la mayorante convergente.

q.e.d.

7.2. Propiedades.

Sean f_{ν} holomorfas en D (abierto). Sea $\sum_{\nu} f_{\nu} = f$ uniformemente convergente en todo subdominio cerrado de D , entonces:

Proposición 7.2 La función f es continua.

Demostración

$$\begin{aligned}
|f(z) - f(z_0)| &= \left| \sum_{\nu=0}^{\infty} f_{\nu}(z) - \sum_{\nu=0}^{\infty} f_{\nu}(z_0) \right| \\
&\leq \left| \sum_{\nu=0}^{n-1} (f_{\nu}(z) - f_{\nu}(z_0)) \right| + \left| \sum_{\nu=n}^{\infty} f_{\nu}(z) \right| + \left| \sum_{\nu=n}^{\infty} f_{\nu}(z_0) \right| < \varepsilon,
\end{aligned}$$

Si cada uno de los términos lo acotamos por $\varepsilon/3$, tomamos un n suficientemente grande y hacemos $z \rightarrow z_0$.

q.e.d.

Proposición 7.3 Afirmamos que

$$\int_{\Gamma} f = \int_{\Gamma} \sum_{\nu=0}^{\infty} f_{\nu} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \int_{\Gamma} f_{\nu}. \quad (7.3)$$

Demostración

$$\int_{\Gamma} f = \int_{\Gamma} \sum_{\nu=0}^{\infty} f_{\nu} = \int_{\Gamma} \sum_{\nu=0}^{n-1} f_{\nu} + \int_{\Gamma} \sum_{\nu=n}^{\infty} f_{\nu},$$

luego

$$\int_{\Gamma} f - \int_{\Gamma} \sum_{\nu=0}^{n-1} f_{\nu} = \int_{\Gamma} \sum_{\nu=n}^{\infty} f_{\nu},$$

podemos intercambiar la suma finita con la integral

$$\int_{\Gamma} f - \sum_{\nu=0}^{n-1} \int_{\Gamma} f_{\nu} = \int_{\Gamma} \sum_{\nu=n}^{\infty} f_{\nu}.$$

Tomando módulo a ambos lados

$$\left| \int_{\Gamma} f - \sum_{\nu=0}^{n-1} \int_{\Gamma} f_{\nu} \right| = \left| \int_{\Gamma} \sum_{\nu=n}^{\infty} f_{\nu} \right| \leq L \text{Máx} \sum_{\nu=n}^{\infty} f_{\nu},$$

donde L es el largo del camino y cuando n es suficientemente grande el máximo puede ser reemplazado por ε .

$$\left| \int_{\Gamma} f - \sum_{\nu=0}^{n-1} \int_{\Gamma} f_{\nu} \right| \leq L\varepsilon,$$

tomando el límite n tendiendo a infinito

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{\Gamma} f - \sum_{\nu=0}^{n-1} \int_{\Gamma} f_{\nu} \right| = 0.$$

q.e.d.

Proposición 7.4 La función f es holomorfa y $f' = (\sum f_\nu)' = \sum f'_\nu$.

Demostración Sea Γ una curva cerrada con su interior en D .

$$\oint_{\Gamma} f = \oint \sum_{\nu=0}^{\infty} f_{\nu} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \oint f_{\nu} = 0 ,$$

por lo tanto, por el teorema de Morera f es holomorfa. Además,

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^2} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\sum_{\nu=0}^{\infty} f_{\nu}(\xi)}{(\xi - z_0)^2} d\xi .$$

La sumatoria converge uniformemente sobre la curva, luego

$$f'(z_0) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f_{\nu}(\xi)}{(\xi - z_0)^2} d\xi = \sum_{\nu=0}^{\infty} f'_{\nu}(z_0) .$$

q.e.d.

Consideremos

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} z^{\nu} , \quad (7.4)$$

con radio de convergencia r . la función f es holomorfa y continua en $|z| < r$, su derivada

$$f'(z) = \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} z^{\nu} \right)' = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} \nu z^{\nu-1} . \quad (7.5)$$

Afirmamos que el radio de convergencia r' de f' es igual a r .

Demostración

- i) $r' \geq r$ porque se ha visto que la convergencia de $\sum_{z \in D} f_{\nu}(z)$ implica la convergencia de $\sum_{z \in D} f'_{\nu}(z)$.
- ii) $r' \leq r$ porque los coeficientes $|\nu a_{\nu}|$ son más grandes que los coeficientes a_{ν} . Recordemos que $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1/|a_n|}$

q.e.d.

Consideremos la serie $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} z^{\nu}$ con radio de convergencia r , esta serie representará a una función holomorfa $f(z)$ dentro del círculo de convergencia. La derivación término a término es lícita y el radio de convergencia sigue igual. Se tiene:

$$f'(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu a_{\nu} z^{\nu-1} ,$$

$$f^{(p)}(z) = \sum_{\nu=p}^{\infty} \nu(\nu-1)(\nu-2) \cdots (\nu-p+1) a_{\nu} z^{\nu-p} ,$$

haciendo el cambio de índice de suma $\mu = \nu - p$ luego $\nu = \mu + p$ tenemos

$$f^{(p)}(z) = \sum_{\mu=0}^{\infty} (\mu + p)(\mu + p - 1)(\mu + p - 2) \cdots (\mu + 1) a_{\mu+p} z^{\mu} \frac{p!}{p!},$$

compactando

$$\boxed{f^{(p)}(z) = p! \sum_{\mu=0}^{\infty} \binom{\mu + p}{p} a_{\mu+p} z^{\mu}} \quad (7.6)$$

Esta serie conserva el mismo radio de convergencia que la original. En el caso particular $z = 0$ tenemos

$$f^{(n)}(0) = n! a_n,$$

despejando el coeficiente a_n tenemos

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\xi|=\rho < r} \frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}} d\xi.$$

Podemos a partir de esta ecuación acotar el módulo del coeficiente a_n

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi} 2\pi\rho \frac{\text{Máx}_{|\xi|=\rho} |f|}{\rho^{n+1}},$$

finalmente

$$\boxed{|a_n| \leq \frac{M(\rho)}{\rho^n}} \quad (7.7)$$

donde $M(\rho) = \text{Máx}_{|z|=\rho} |f|$. Esta relación, (7.7), es conocida como la *Desigualdad de Cauchy*.

Hemos observado propiedades de las series, cuyos términos son funciones holomorfas, para representar funciones holomorfas.

Sea ahora $f(z)$ holomorfa en la vecindad de $z_0 = 0$, $|z| < r_0$. Consideremos

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi} \frac{1}{1 - \frac{z}{\xi}} = \frac{1}{\xi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^{\nu}}{\xi^{\nu}}.$$

Esta serie converge en $|z| < |\xi|$. Luego

$$\frac{1}{\xi - z} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^{\nu}}{\xi^{\nu+1}},$$

converge uniformemente en $|z| \leq q < |\xi|$, usando uno de los teoremas anteriores. Por Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\xi|=\rho} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\xi|<\rho} \frac{f(\xi)}{\xi^{\nu+1}} d\xi \right\},$$

lo que podemos reescribir como

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{\nu}(0)}{\nu!} z^{\nu} \quad (7.8)$$

Lo que corresponde al desarrollo de Maclaurin de $f(z)$. A continuación formalizaremos un poco más todo esto mediante el siguiente teorema.

Teorema 7.3 Si la función $f(z)$ es holomorfa en una vecindad de z_0 entonces

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{\nu}(z_0)}{\nu!} (z - z_0)^{\nu}, \quad \text{Taylor.} \quad (7.9)$$

Basta poner $(\xi - z_0) - (z - z_0)$ en los desarrollos anteriores. Con $z_0 = 0$ obtenemos Maclaurin.

Teorema 7.4 De identidad o unicidad.

Consideremos las series $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu}(z - z_0)^{\nu}$ con radio de convergencia $r_1 > 0$ y $\sum_{\nu=0}^{\infty} b_{\nu}(z - z_0)^{\nu}$ con radio de convergencia $r_2 > 0$. Si sus sumas coinciden para todos sus puntos en una vecindad de $z = z_0$ entonces son idénticas.

Demostración Si $z = z_0$ entonces $a_0 = b_0$. Supongamos que hemos probado $a_k = b_k$ para $k = 0, \dots, m$, entonces tenemos

$$a_{m+1} + a_{m+2}(z - z_0) + \dots = b_{m+1} + b_{m+2}(z - z_0) + \dots$$

Puesto que esta serie es continua podemos hacer $z \rightarrow z_0$ obteniendo $a_{m+1} = b_{m+1}$.

q.e.d.

Ejemplo Sea $f(z) = \log z$, como $f'(z) = \frac{1}{z} \implies \log z = \int_1^z \frac{d\xi}{\xi}$

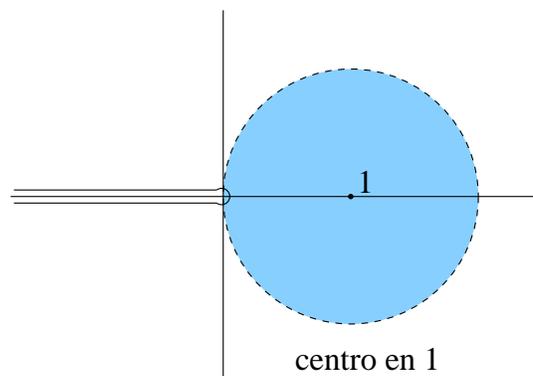


Figura 7.3: Región simplemente conexa $\text{Re}(z) > 0$.

Expandamos en serie el inverso de z

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1 - (1 - z)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (1 - z)^{\nu} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} (z - 1)^{\nu} ,$$

integrando la ecuación anterior

$$\log z = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{(z - 1)^{\nu+1}}{\nu + 1} = (z - 1) - \frac{1}{2}(z - 1)^2 + \frac{1}{3}(z - 1)^3 - + \dots . \quad (7.10)$$

Esta expansión es única. Notemos que no se incluye una constante de integración tal que $\log 1 = 0$. Podemos evaluar en un punto sobre el borde

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - + \dots .$$

Cuando se conoce que $f(z)$ es holomorfa en todos los puntos de un círculo Γ_0 la convergencia de la serie está garantizada, no es necesario hacer una prueba para la convergencia.

El máximo radio de Γ_0 es la distancia desde el centro z_0 de la expansión al punto singular de f más cercano a z_0 , ya que la función debe ser holomorfa en todo el círculo. Ver figura 7.3.

Ejemplos:

$$e^z = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{z^{\nu}}{\nu!} \quad |z| < \infty \quad (7.11)$$

$$\text{sen } z = \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu+1} \frac{z^{2\nu-1}}{(2\nu-1)!} \quad |z| < \infty \quad (7.12)$$

$$\text{cos } z = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{z^{2\nu}}{(2\nu)!} \quad |z| < \infty \quad (7.13)$$

$$\text{senh } z = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{z^{2\nu-1}}{(2\nu-1)!} \quad |z| < \infty \quad (7.14)$$

$$\text{cosh } z = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{z^{2\nu}}{(2\nu)!} \quad |z| < \infty \quad (7.15)$$

$$\frac{1}{1 - z} = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu} \quad |z| < 1 \quad (7.16)$$

$$\frac{1}{1 + z} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} z^{\nu} \quad |z| < 1 \quad (7.17)$$

Ejercicio Representar la función $f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-3)}$ por medio de una serie de potencias positivas y negativas de $(z-1)$ que converge a $f(z)$ cuando $0 < |z-1| < 2$.

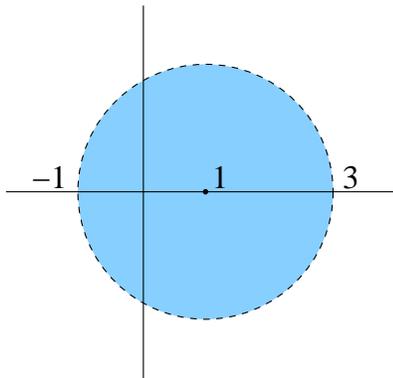


Figura 7.4: Región de convergencia.

$$\text{Solución: } f(z) = -\frac{1}{2(z-1)} - 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^{n-1}}{2^{n+1}}.$$

7.3. Máximos, mínimos y funciones armónicas.

Teorema 7.5 Una función holomorfa en z_0 no puede tener allí un máximo de su valor absoluto salvo en el caso que $f = \text{cte}$.

Demostración (1^{ra}) En la vecindad de z_0 tenemos

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots,$$

con algún radio de convergencia r . Supongamos que por lo menos uno de los coeficientes siguientes a a_0 es no nulo. Sea a_m con $m \geq 1$ el primero de estos coeficientes

$$f(z) = a_0 + a_m(z - z_0)^m + a_{m+1}(z - z_0)^{m+1} + \dots,$$

con $a_1 = a_2 = \dots = a_{m-1} = 0$. Sea

$$a_0 = Ae^{i\alpha}, \quad a_m = Be^{i\beta}, \quad z - z_0 = \rho e^{i\varphi},$$

con $0 < \rho < r$. De este modo

$$f(z) = Ae^{i\alpha} + Be^{i\beta} \rho^m e^{im\varphi} + a_{m+1}(z - z_0)^{m+1} + \dots$$

Busquemos una dirección donde crezca $|f(z)|$. Tomamos φ tal que $\beta + m\varphi = \alpha$, entonces

$$f(z) = (A + B\rho^m)e^{i\alpha} + a_{m+1}(z - z_0)^{m+1} + \dots,$$

tomemos el módulo a ambos lados

$$\begin{aligned} |f(z)| &\geq A + B\rho^m - |a_{m+1}|\rho^{m+1} - \dots \\ &\geq A + \rho^m[B - (|a_{m+1}|\rho + \dots)]. \end{aligned}$$

Tomamos ρ tan pequeño de modo que $(|a_{m+1}|\rho + \dots) < \frac{B}{2}$,

$$|f(z)| > A + \frac{B\rho^m}{2} = |f(z_0)| + \frac{B\rho^m}{2}.$$

Lo cual implica $|f(z)| > |f(z_0)|$ para todo punto suficientemente cercano a z_0 .

q.e.d.

Principio de módulo máximo: El módulo máximo de una función holomorfa en una región cerrada, se encuentra siempre sobre la frontera de la región.

Demostración (2^{da}) Escribamos $f(z_0)$ a partir de la fórmula integral de Cauchy

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\xi - z_0| = \rho} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} d\xi,$$

tomamos módulo a ambos lados

$$|f(z_0)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\xi - z_0| = \rho} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} \right| \leq \frac{1}{2\pi} \oint \frac{|f(\xi)|}{|\xi - z_0|} d\xi = \frac{1}{2\pi\rho} \oint |f(\xi)| d\xi.$$

Supongamos que $|f(z_0)| \geq |f(z)|$ en cierta vecindad de z_0 . Si un punto sobre el borde, $|z - z_0| = \rho$ fuese $|f(z)| < |f(z_0)|$ entonces en una parte del borde

$$|f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi\rho} \oint |f(\xi)| d\xi < \frac{1}{2\pi\rho} \oint |f(z_0)| d\xi = |f(z_0)|,$$

contradicción.

q.e.d.

Consideremos ahora funciones armónicas, escribimos $f(z_0) = u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0)$. Por otra parte, de la fórmula integral de Cauchy tenemos

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\text{circunf.}} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} d\xi.$$

Parametricemos la circunferencia centrada en z_0 y de radio ρ por $\xi = z_0 + \rho e^{it}$, donde $-\pi \leq t \leq \pi$, la diferencial $d\xi = i\rho e^{it} dt$, luego

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(z_0 + \rho e^{it}) i\rho e^{it} dt}{\rho e^{it}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(z_0 + \rho e^{it}) dt.$$

Lo cual corresponde al promedio de f sobre la curva. Usemos ahora la expresión de f en función de u y v

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [u(x_0 + \rho \cos t, y_0 + \rho \sen t) + iv(x_0 + \rho \cos t, y_0 + \rho \sen t)] dt .$$

Comparando parte real y parte imaginaria tenemos

$$\begin{aligned} u(x_0, y_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(x_0 + \rho \cos t, y_0 + \rho \sen t) dt \\ v(x_0, y_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v(x_0 + \rho \cos t, y_0 + \rho \sen t) dt . \end{aligned}$$

Si tomamos el arco como el parámetro $s = \rho t$ con $dt = \frac{ds}{\rho}$ tenemos

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi\rho} \int_{s=-\pi\rho}^{s=\pi\rho} u ds ,$$

lo cual es el promedio. Si $u = \text{cte}$ sobre la circunferencia entonces $u(x_0, y_0) = u$.

En el centro $z_0 = (x_0, y_0)$ las funciones u y v no pueden tomar máximos ni mínimos salvo en el caso que ellas sean constantes. Usemos u para el análisis pero es claramente válido para v . Por ser u armónica satisface

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \implies \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} .$$

Por lo tanto, la expresión

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \leq 0 ,$$

esto excluye máximos y mínimos en el sentido estricto. Sólo podemos tener puntos de ensilladura.

7.4. Números de Bernoulli.

Consideremos la función

$$\frac{z}{e^z - 1} = \frac{z}{-1 + 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots} = \frac{1}{\frac{1}{1!} + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \dots} .$$

Es holomorfa en $z = 0$ luego permite un desarrollo en serie con centro en $z = 0$.

$$\frac{z}{e^z - 1} = B_0 + \frac{B_1}{1!} z + \frac{B_2}{2!} z^2 + \dots = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{B_\nu}{\nu!} z^\nu . \quad (7.18)$$

Los B_i son conocidos como los números de Bernoulli. La ecuación (7.18) corresponde a una generalización a variable compleja de la ecuación (1.137).

Podemos encontrar las relaciones de recurrencia para los B_i a partir de la identidad

$$\begin{aligned} \frac{z}{e^z - 1} \frac{e^z - 1}{z} = 1 &= \left(B_0 + \frac{B_1}{1!} z + \frac{B_2}{2!} z^2 + \dots \right) = \left(1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots \right) \\ &= 1 + \left(1 \cdot \frac{1}{2!} + \frac{B_1}{1!} \right) z + \dots + \left(\frac{B_n}{n!} \cdot \frac{1}{1!} + \frac{B_{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{(n+1)!} \right) z^n + \dots \end{aligned}$$

Obtenemos

$$\frac{B_n}{n!} \cdot \frac{1}{1!} + \frac{B_{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{(n+1)!} = 0.$$

Los números de impares $B_{2n+1} = 0$ para $n \geq 1$ como ya probamos en la sección 1.10, en esa misma sección listamos los primeros números de Bernoulli en la tabla 1.1 que reproducimos a continuación.

n	B_n	B_n
0	1	1.0000 00000
1	$-\frac{1}{2}$	-0.5000 00000
2	$\frac{1}{6}$	0.1666 66667
3	$-\frac{1}{30}$	-0.0333 33333
4	$\frac{1}{42}$	0.0238 09524
5	$-\frac{1}{30}$	-0.0333 33333
6	$\frac{5}{66}$	0.0757 57576

Cuadro 7.1: Números de Bernoulli

Ejemplo Encuentre el desarrollo en serie de potencias positivas y negativas de $\cot z$ en torno a $z = 0$.

$$\cot z = \frac{\cos z}{\sen z} = i \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}} = i \frac{(e^{2iz} - 1) + 2}{e^{2iz} - 1},$$

luego multiplicando por z ,

$$z \cot z = iz + \frac{2iz}{e^{2iz} - 1} = iz + 1 + B_1(2iz) + \frac{B_2}{2!}(2iz)^2 + \dots = 1 - \frac{2^2 B_2}{2!} z^2 + \frac{2^4 B_4}{4!} z^4 + \dots$$

Dividiendo por z tenemos

$$\cot z = \frac{1}{z} - \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2^{2\nu} B_{2\nu}}{(2\nu)!} z^{2\nu-1} \quad (7.19)$$

¿Existe un desarrollo similar para $\tan z$?

Capítulo 8

Prolongación Analítica.

versión final 1.3, 05 de Junio del 2003

8.1. Definiciones.

Definición 8.1 El conjunto T es un conjunto acotado si existe un ρ tal que $|z| < \rho \forall z \in T$.

Definición 8.2 El conjunto T es un conjunto no acotado si $\forall \rho > 0$ habrá $z \in T$ tal que $|z| > \rho$.

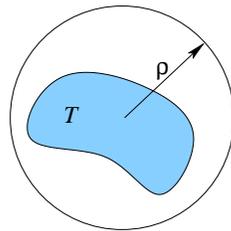


Figura 8.1: Conjunto acotado.

Definición 8.3 El punto ζ es punto límite del conjunto T si dado cualquier $\varepsilon > 0$ tan pequeño como se quiera, existe en cantidad infinita de $z \in T$ tal que $|z - \zeta| < \varepsilon$.

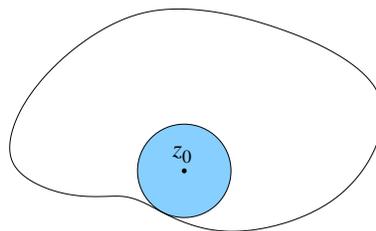


Figura 8.2: Punto límite.

El punto ζ es punto límite del conjunto T si cada vecindad de ζ contiene puntos, distintos de ζ , del conjunto.

Definición 8.4 El punto $\zeta \in T$ es un punto aislado de T si existe una vecindad en torno a ζ que no contiene otros puntos de T .

Definición 8.5 El punto $\zeta \in T$ es un punto interior de T si existe una vecindad en torno a ζ cuyos puntos estén en T . Los puntos interiores son siempre puntos límites.

Definición 8.6 El punto ζ es un punto exterior de T si ζ y una vecindad en torno a ζ no pertenecen a T .

Definición 8.7 El punto ζ es un punto de la frontera de T si en **toda** vecindad en torno a ζ hay por lo menos un punto que pertenece a T y por lo menos un punto que no pertenece a T . El punto ζ puede o no pertenecer al conjunto T .

Definición 8.8 El conjunto T es un conjunto cerrado si contiene a todos sus puntos límites. Por ejemplo, $|z| \leq 1$.

Definición 8.9 El conjunto T es un conjunto abierto si $z \in T$ es punto interior. Por ejemplo, $0 < |z| < 1$.

8.2. Lema de Heine-Borel

Sea T un subconjunto del plano, acotado y cerrado. Si todo punto $z \in T$ está recubierto por al menos un círculo C_z entonces basta una cantidad finita de círculos para recubrir todo el conjunto T .

Demostración

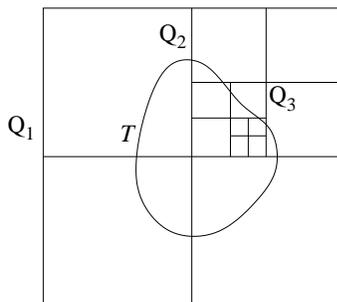


Figura 8.3: Lema de Heine-Borel I.

Supongamos que se requiere una cantidad infinita de círculos para recubrir T . Encerrando a T en un cuadrado Q_1 subdividimos a este cuadrado en cuatro partes de las cuales consideramos una llamada Q_2 . El subconjunto T queda con una parte en cada cuadrado y por definición la cerramos. Puesto que se requiere una cantidad infinita de círculos para cubrir T , también se requerirá una cantidad infinita para por lo menos una de las subdivisiones. Proseguimos construyendo una sucesión de cuadrados “encajados”: $Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_n, \dots$ cada uno conteniendo un subconjunto de T que requiere de una cantidad infinita de círculos para su recubrimiento. Esto no puede ser así si T es cerrado.

Si el “encaje” de cuadrados se contrae a un punto, llamémoslo ζ . el punto $\zeta \in T$ es un punto límite de T , (T es cerrado). Por lo tanto, ζ está recubierto por uno de los círculos en cuestión, sea C_ζ este círculo. Ahora bien, si p se elige tal que la diagonal de Q_p es menor que la distancia de ζ a la circunferencia, entonces todos los puntos dentro de Q_p ya están recubiertos por el círculo C_ζ y sin embargo se supuso que una cantidad infinita de círculos se necesita para recubrir estos puntos, contradicción.

q.e.d.

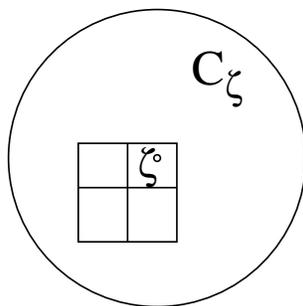


Figura 8.4: Lema de Heine-Borel II.

8.3. Teorema de identidad.

Si dos funciones f y g son holomorfas en un dominio abierto y conexo D , y si ellas coinciden en una vecindad de un punto $z_0 \in D$, o a lo largo de un segmento que termina en z_0 , o en un número infinito de puntos distintos con punto límite en z_0 , entonces las dos funciones son iguales en todo D .

Demostración

Ambas funciones pueden expandirse con centro en z_0 . Por el teorema de identidad para las series de potencia ambas expansiones son idénticas, por lo tanto, $f = g$ dentro del círculo K_0 .

Consideremos ahora un punto arbitrario $\zeta \in D$ debemos mostrar que también en ese punto $f(\zeta) = g(\zeta)$. Conectemos z_0 con ζ con un camino contenido completamente en D .

Sea $\rho > 0$ la distancia mínima del camino al borde de D . Subdividamos el camino en segmentos cuyas longitudes sean menores que ρ . Se definen así los puntos $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$. Dibujemos los "círculos máximos" centrados en estos puntos. Es claro que los radios de estos círculos son todos mayores o iguales a ρ .

Por lo tanto, cada círculo contiene el centro del siguiente. Expandimos ahora f y g en estos nuevos centros z_ν . En cada caso las series convergen dentro del círculo K_ν . Vimos que $f = g$ en K_0 por lo tanto, $f(z_1) = g(z_1)$ ya que $z_1 \in K_0$, y también en una vecindad de z_1 lo que implica que las expansiones con centro en z_1 son idénticas $\implies f = g$ en z_2 y en una vecindad de z_2 . Luego de varias etapas similares concluimos que $f = g$ en ζ y en una vecindad de ζ .

El Lema de Heine-Borel garantiza que el recubrimiento se hace con una cantidad finita de círculos.

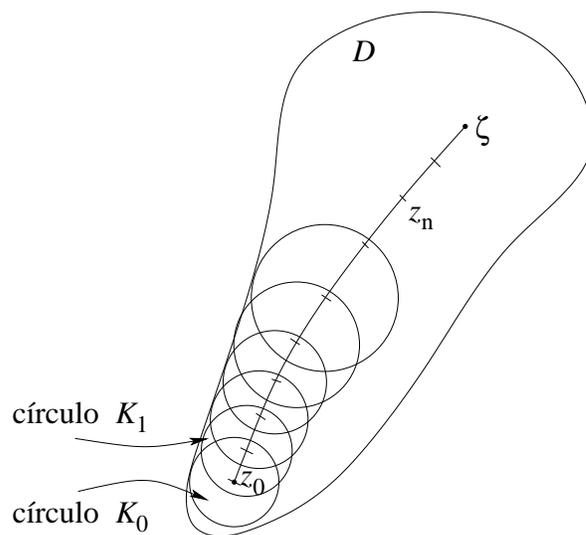


Figura 8.5: Teorema de identidad.

q.e.d.

8.4. Prolongación analítica.

Idea: Sea el conjunto $D = D_1 \cup D_2$ tal que $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$. Supongamos además, que están bien definidas las funciones f_1 en D_1 y f_2 en D_2 respectivamente.

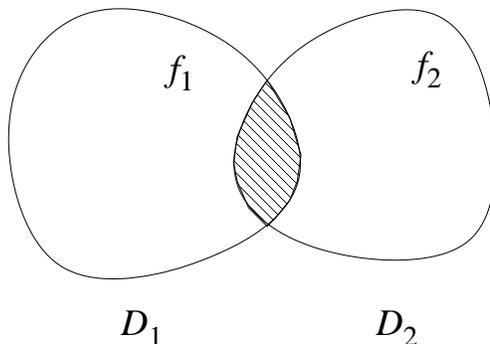


Figura 8.6: Conjuntos D_1 y D_2 .

Premisa: $f_1(z) = f_2(z)$ si $z \in D_1 \cap D_2$. Se conozcan dos representaciones parciales f_1 y f_2 de la misma función f . (f_1 y f_2 son elementos de f .)

En casos de dominios de conexión simple la prolongación es única.

$$f_1 = f_2, \quad \text{en } D_1 \cup D_2.$$

f_1 es la prolongación analítica de f_2 , y viceversa.

Ejemplo Definamos $f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu}$ en el dominio $|z| < 1$.

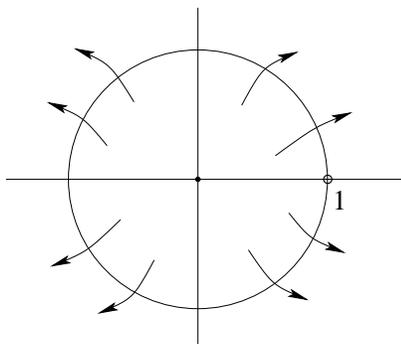


Figura 8.7: Zona de convergencia de $1/(1-z)$.

En el círculo vale que $\sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu} = \frac{1}{1-z} = f(z)$. También en todo el plano salvo $z = 1$, la función vale $\frac{1}{1-z}$.

Consideremos ahora

$$g(z) = \frac{1}{1-i} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{z-i}{1-i} \right)^{\nu}.$$

Su radio de convergencia $|z-i| < |1-i| = \sqrt{2}$.

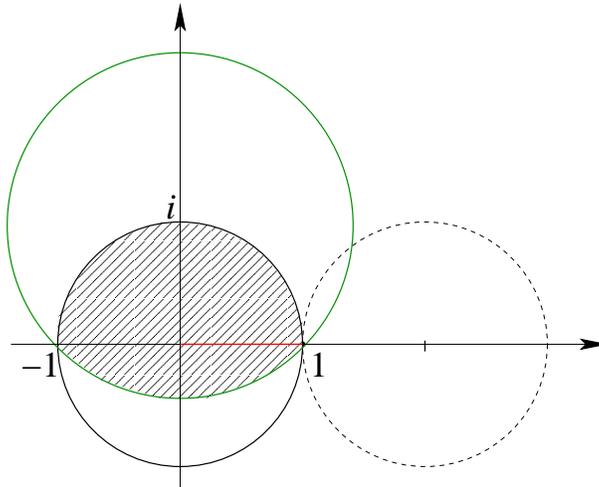


Figura 8.8: Prolongación analítica.

Dentro de la circunferencia superior (la verde)

$$g(z) = \frac{1}{1-i} \frac{1}{1 - \frac{z-i}{1-i}} = \frac{1}{1-z}.$$

Decimos entonces que $g(z)$ es la prolongación analítica de $f(z)$ y viceversa.

Notemos que no es posible prolongar f analíticamente usando centros x_0 con $0 < x_0 < 1$.

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{(1-x_0) - (z-x_0)} = \frac{1}{1-x_0} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{z-x_0}{1-x_0} \right)^{\nu},$$

converge para $|z-x_0| < |1-x_0| < 1$. No se sale del círculo.

En caso $-1 < x_0 < 0$ tenemos

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1+|x_0|} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{z-|x_0|}{1-|x_0|} \right)^{\nu}.$$

converge para $|z-|x_0|| < |1-|x_0||$. *i.e.* círculo centro en $x_0 < 0$ y radio $1 < r < 2$.

Problema: Muestre que las series $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^{\nu}}{2^{\nu+1}}$ y $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(z-i)^{\nu}}{(2-i)^{\nu+1}}$, son las continuaciones analíticas de una respecto a la otra.

Ejemplo Consideremos las funciones

$$\text{sen } x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \dots, \quad e^x = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^{\nu}}{\nu!}$$

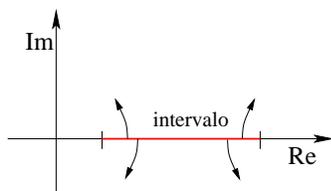


Figura 8.9: Prolongación al plano complejo.

Prolongación analítica al plano complejo

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} z &= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - + \dots \\ e^z &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^{\nu}}{\nu!} \end{aligned}$$

Ambas expresiones únicas son únicas.

Vimos en el ejemplo de la función $1/(1-z)$ que sobre el borde del círculo $|z| < 1$ se podían efectuar nuevos desarrollos en serie, en particular en $z_0 = i$. Había un problema serio en $z = 1$.

Teorema 8.1 En la periferia del círculo de convergencia hay por lo menos un problema serio para el desarrollo de f en una serie de Taylor.

Demostración Si así no fuere, cada punto de la periferia estaría recubierto por un círculo donde f existe como holomorfa.

Definiendo la zona de convergencia

$$|z - z_0| < r', \quad r' > r,$$

podemos ver que hay una contradicción ya que podríamos agrandar el radio de convergencia:

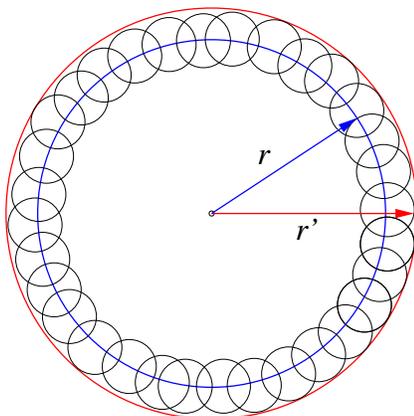


Figura 8.10: Agrandar el radio de convergencia.

q.e.d.

Ejemplo

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu},$$

tiene un obstáculo en $z = 1$.

Ejemplo

$$z \cot z = 1 - \frac{2^2}{2!} B_2 z^2 + \frac{2^4}{4!} B_4 z^4 + \dots,$$

con radio de convergencia π , en efecto $z \cot z = z \cos z / \sin z$ el denominador se anula y da problemas en $z = \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \dots$

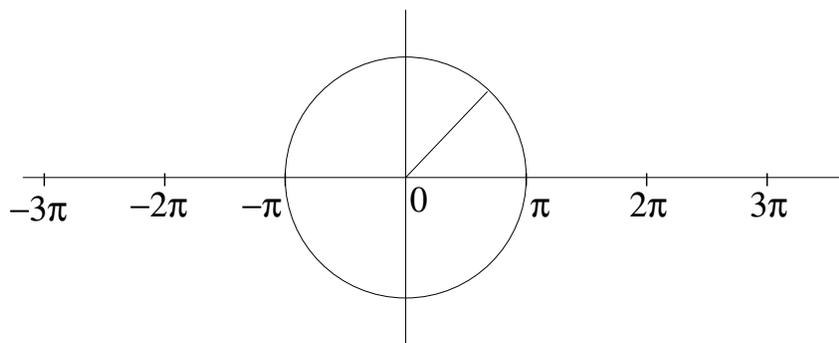


Figura 8.11: Obstáculos para la función $z \cot z$.

Consideremos la función

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu} = \frac{1}{1-z}, \quad \text{para } |z| < 1.$$

Nuevo centro de desarrollo $z_0 = -1$. Hacemos el cambio de variable $z+1 = s$ La prolongación

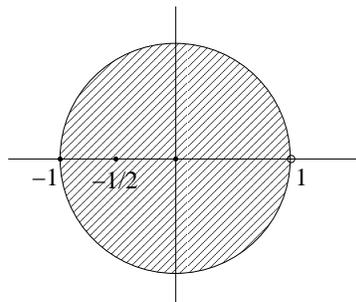


Figura 8.12: Desarrollos para la función $1/(1-z)$.

que buscamos es

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=0}^{\infty} (s-1)^{\nu} &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\nu} \binom{\nu}{\mu} s^{\mu} (-1)^{\nu-\mu} = \sum_{\mu=0}^{\infty} s^{\mu} \left[\sum_{\nu=\mu}^{\infty} \binom{\nu}{\mu} (-1)^{\nu-\mu} \right] \\ &= s^0 \left[\binom{0}{0} (-1)^0 + \binom{1}{0} (-1)^1 + \binom{2}{0} (-1)^2 + \dots \right] \\ &\quad + s^1 \left[\binom{1}{1} (-1)^0 + \binom{2}{1} (-1)^1 + \binom{3}{1} (-1)^2 + \dots \right] + \dots \\ &= s^0 (1 - 1 + 1 - 1 + 1 + \dots) + s^1 (1 - 2 + 3 - 4 + \dots) + \dots, \end{aligned}$$

esto fracasó porque la función $f(z)$ no converge en -1 . Tratemos con otro centro $z_0 = -\frac{1}{2}$, luego $z = \left(z + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = s - \frac{1}{2}$, prolongación

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(s - \frac{1}{2}\right)^{\nu} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\nu} \binom{\nu}{\mu} s^{\mu} \left(\frac{-1}{2}\right)^{\nu-\mu} \\ &= \sum_{\mu=0}^{\infty} s^{\mu} \left[\sum_{\nu=\mu}^{\infty} \binom{\nu}{\mu} \left(\frac{-1}{2}\right)^{\nu-\mu} \right] \\ &= s^0 \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots\right) + s^1 \left(1 - 2\frac{1}{2} + 3\frac{1}{4} - 4\frac{1}{8} + \dots\right) + \dots, \end{aligned}$$

ahora sí converge.

Busquemos ahora las derivadas de $f(z) = \frac{1}{1-z}$ en $z_0 = -\frac{1}{2}$

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{(1-z)^{n+1}},$$

al evaluar en $z_0 = -\frac{1}{2}$

$$f^{(n)}\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} n!,$$

luego los coeficientes b_n de la expansión de Taylor de f en $z_0 = -\frac{1}{2}$ son

$$b_n \equiv \frac{1}{n!} f^{(n)}\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}.$$

Luego la expansión para f es

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \left(z + \frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \left(z + \frac{1}{2}\right)^n.$$

Evaluemos el radio de convergencia.

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}} = \frac{3}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{2}{3}}} = \frac{3}{2}.$$

8.5. Función ζ de Riemann.

Los número primos: 2, 3, 5, 7, 11, 13, ... Los números naturales los podemos escribir como: $n = 2^\kappa \cdot 3^\lambda \cdot 5^\mu \cdot 7^\nu \cdot \dots$. En general, cada número natural tiene una expansión única en número primos que podemos escribir

$$n = \prod_{\text{todo } p_\nu} p_\nu^{e_\nu} \quad \text{con } e_\nu \geq 0 \text{ y } p_1 = 2, p_2 = 3, \dots \quad (8.1)$$

Consideremos la siguiente relación

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{5}} = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^\kappa \sum_{\lambda=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^\lambda \sum_{\mu=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^\mu = \sum_{\{\dots\}} \frac{1}{n},$$

donde la notación $\{\dots\}$ significa que la suma corre sobre todos los n que sólo tienen los factores primos 2, 3 y 5. Podemos pensar en el caso general, es decir:

$$\prod_{\text{todo } p_\nu} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_\nu}} \stackrel{?}{=} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n}, \quad (8.2)$$

lamentablemente la serie de la derecha diverge, luego no podemos hacer la identificación, tal como está planteada en (8.2).

Sea $x > 1$ el exponente en

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} = \zeta(x), \quad (8.3)$$

esta serie converge. Graficamos esta serie en función de x

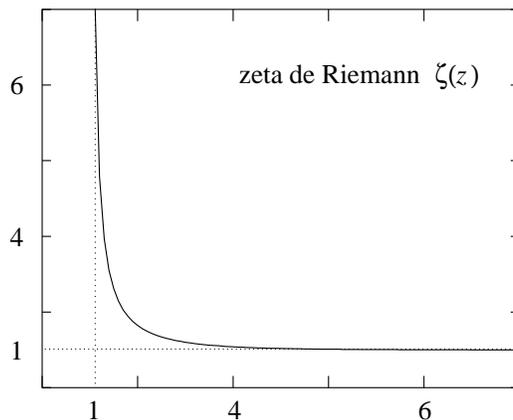


Figura 8.13: Función ζ de Riemann.

Definición 8.10 Definimos la función llamada función zeta de Riemann $\zeta(x)$ para todo $x > 1$ como

$$\zeta(x) \equiv \prod_{\text{todo } p_\nu} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_\nu^x}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} \quad (8.4)$$

¿Permite $\zeta(x)$ una prolongación analítica al plano complejo?

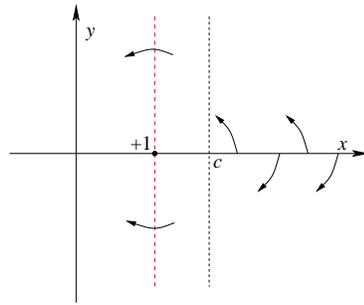


Figura 8.14: Prolongación al plano complejo de la función ζ .

Tenemos que $n^z = e^{z \log n}$ luego podemos definir la función zeta en el plano complejo como sigue:

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-z \log n}. \quad (8.5)$$

La función así definida tiene los valores conocidos $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ ó $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{96}$.

Proposición 8.1 La serie (8.5) converge uniformemente en $\text{Re}[z] \geq c > 1$.

Demostración

$$|e^{-z \log n}| = |e^{-x \log n}| |e^{-iy \log n}| = |e^{-x \log n}| = \frac{1}{n^x} \leq \frac{1}{n^c}.$$

Pero $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^c}$ converge independientemente de z y de acuerdo a lo anterior es una mayorante convergente, luego $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ converge absolutamente y uniformemente en $\text{Re}[z] \geq c > 1$.
q.e.d.

Con esto se tiene que $\zeta(z)$ es holomorfa. ¿Es posible atravesar la frontera, paralela al eje imaginario y que pasa por 1?

8.6. Lugares nulos y a -lugares.

Definición 8.11 Un punto z_0 de una región donde $f(z)$ es holomorfa, es llamado lugar nulo de $f(z)$ si $f(z_0) = 0$.

Definición 8.12 Tal punto z_0 de una región donde $f(z)$ es holomorfa, es llamado un a -lugar de $f(z)$ si $f(z_0) = a$.

Definición 8.13 El punto z_0 es un lugar nulo de multiplicidad $m > 0$ de $f(z)$, si $f(z)$ es holomorfa en z_0 y admite el desarrollo

$$f(z) = a_m(z - z_0)^m + a_{m+1}(z - z_0)^{m+1} + \dots, \quad \text{con } a_m \neq 0.$$

Ejemplo La función $g(z)$ tiene un lugar nulo de multiplicidad uno en z_0 si acepta un desarrollo $g(z) = a(z - z_0) + \dots$ con $a \neq 0$.

Definición 8.14 El punto z_0 es un a -lugar de $f(z)$ de multiplicidad $m > 0$ si $g(z) = f(z) - a$ tiene en z_0 un lugar nulo de multiplicidad m .

$$f(z) = a + \sum_{\nu=m}^{\infty} a_{\nu}(z - z_0)^{\nu}, \quad \text{con } a_m \neq 0.$$

Proposición 8.2 Si f tiene en z_0 un a -lugar de multiplicidad $m \geq 1$, entonces f' tiene en z_0 un lugar nulo de multiplicidad $m - 1$.

Demostración Como f tiene en z_0 un a -lugar de multiplicidad $m \geq 1$ la podemos escribir

$$f(z) = a + a_m(z - z_0)^m + a_{m+1}(z - z_0)^{m+1} + \dots,$$

con $a_m \neq 0$. Derivamos esta ecuación y obtenemos

$$f'(z) = a_m m(z - z_0)^{m-1} + a_{m+1}(m+1)(z - z_0)^m + \dots,$$

claramente $ma_m \neq 0$ luego f' tiene en z_0 un lugar nulo de multiplicidad $m - 1$.

q.e.d.

Teorema 8.2 Sea $f(z) \neq \text{cte.}$, holomorfa en algún dominio D . Entonces en un parte finita y cerrada de D , la condición $f(z) = a$ se puede cumplir sólo en un conjunto finito de puntos.

Demostración Supongamos que la función $f(z)$ tiene infinitos a -lugares en z_{ν} distintos con $\nu = 0, 1, 2, \dots$, es decir, $f(z_{\nu}) = a$. Existirá en D un punto límite llamémoslo z_0 , por lo tanto, por el teorema de identidad: Si dos funciones f y g son holomorfas en un dominio abierto y conexo D , y si ellas coinciden en una vecindad de un punto $z_0 \in D$, o a lo largo de un segmento que termina en z_0 , o en un número infinito de puntos distintos con punto límite en z_0 , entonces las dos funciones son iguales en todo D . En nuestro caso las dos funciones son f y $g = a = \text{cte.}$ luego $f = \text{cte.}$ contradicción. No hay un número infinito de puntos en los que la función $f(z)$ tenga a -lugares en D .

q.e.d.

Teorema 8.3 Si $f(z)$ es holomorfa en z_0 , existe una vecindad de z_0 donde $f(z) \neq f(z_0) \forall z \neq z_0$.

Demostración Consecuencia del teorema anterior.

q.e.d.

Contraejemplo: (Aparente)

Consideremos la función

$$f(z) = \text{sen} \frac{1}{1-z},$$

en el intervalo real $]0, 1[$. Resolvamos el caso

$$\operatorname{sen} \frac{1}{1-x} = 0, \implies \frac{1}{1-x} = k\pi \implies x_k = 1 - \frac{1}{k\pi},$$

con $k = 1, 2, 3, \dots$. La función f tiene infinitos lugares nulos entre 0 y 1. Lo que pasa es que el punto de acumulación o punto límite es $x = 1$ y en ese punto $f(z)$ no es holomorfa.

8.7. Comportamiento en infinito.

Funciones definidas para $|z| \gg 1$ nos sugieren preguntarnos por su comportamiento en infinito ($z = \infty$).

Definición 8.15 La función $f(z)$ es holomorfa en $z = \infty$ si la función $f\left(\frac{1}{s}\right)$ lo es en $s = 0$.

Lo anterior implica que

$$\frac{d}{ds} f\left(\frac{1}{s}\right) = f'\left(\frac{1}{s}\right) \cdot \left(-\frac{1}{s^2}\right),$$

debe existir en $s = 0$.

Ejemplo 1: Sea $f(z) = c$ constante. Luego $f\left(\frac{1}{s}\right) = c$ implica $f'\left(\frac{1}{s}\right) = 0$. Evaluemos la derivada cuando $s \rightarrow 0$

$$\lim_{s \rightarrow 0} f'\left(\frac{1}{s}\right) \cdot \left(-\frac{1}{s^2}\right) = \lim_{s \rightarrow 0} 0 \cdot \left(-\frac{1}{s^2}\right) = 0,$$

por lo tanto, f es holomorfa en $z = \infty$ y $f'(z) = 0$ en $z = \infty$.

Ejemplo 2: Sea $f(z) = z$ lineal. Luego $f\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{1}{s}$ implica $f'\left(\frac{1}{s}\right) = 1$. Evaluemos la derivada cuando $s \rightarrow 0$

$$\lim_{s \rightarrow 0} f'\left(\frac{1}{s}\right) \cdot \left(-\frac{1}{s^2}\right) = \lim_{s \rightarrow 0} 1 \cdot \left(-\frac{1}{s^2}\right) \rightarrow \infty,$$

por lo tanto, f no es holomorfa en $z = \infty$.

Ejemplo 3: Sea $f(z)$ una función racional

$$f(z) = \frac{a_m z^m + \dots + a_1 z + a_0}{b_n z^n + \dots + b_1 z + b_0},$$

con las premisas que $m \leq n$, $a_m \neq 0$ y $b_n \neq 0$. Escribamos $f\left(\frac{1}{s}\right)$

$$f\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{a_m s^{-m} + \dots + a_1 s^{-1} + a_0}{b_n s^{-n} + \dots + b_1 s^{-1} + b_0} = \frac{a_m s^{n-m} + \dots + a_1 s^{n-1} + a_0 s^n}{b_n + \dots + b_1 s^{n-1} + b_0 s^n}.$$

Evaluemos el límite de la función $f(z)$ cuando z va a infinito

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\frac{a_m}{z^{n-m}} + \cdots + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n}}{b_n + \cdots + \frac{b_1}{z^{n-1}} + \frac{b_0}{z^n}} = \begin{cases} \frac{a_m}{b_n} & \text{si } m = n, \\ 0 & \text{si } m < n, \end{cases},$$

en ambos casos tiende a una constante, luego $f\left(\frac{1}{s}\right)$ es diferenciable en $s = 0$, lo que implica que $f(z)$ es holomorfa en $z = \infty$.

Capítulo 9

Funciones Multivaluadas.

versión final 1.1, 10 de Junio del 2003

9.1. Función \sqrt{z} .

Consideremos la función $w = f(z) = z^2$

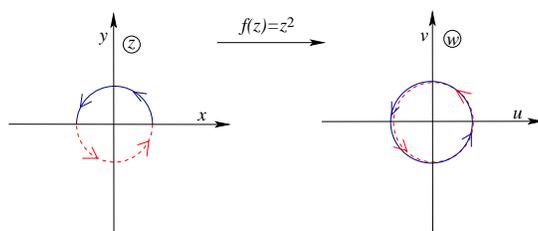


Figura 9.1: La función $f(z) = z^2$.

No hay una correspondencia biunívoca entre z y w . A cada punto $(u, v) \neq 0$ le corresponden dos puntos en el plano z .

Consideremos $f(x) = \sqrt{x}$ con x una variable real $0 \leq x < \infty$. Podemos expandir la función en torno a $x = 1$

$$f(x) = (1 + (x - 1))^{\frac{1}{2}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{\nu} (x - 1)^{\nu}, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

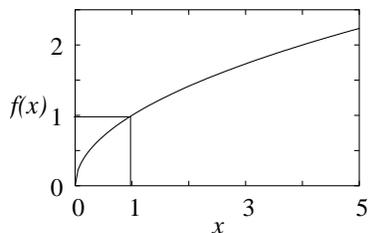


Figura 9.2: La función $f(x) = \sqrt{x}$.

Consideremos la prolongación analítica al plano complejo:

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{\nu} (z-1)^{\nu} \stackrel{?}{=} \sqrt{z}$$

Tratemos de comprobar si se cumple la igualdad. Tenemos

$$(f(z))^2 = \left(\sum_{\mu} \binom{\frac{1}{2}}{\mu} (z-1)^{\mu} \right) \left(\sum_{\nu} \binom{\frac{1}{2}}{\nu} (z-1)^{\nu} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{\mu+\nu=n} \binom{\frac{1}{2}}{\nu} \binom{\frac{1}{2}}{\mu} \right] (z-1)^n .$$

Usando la fórmula auxiliar

$$\sum_{\nu=0}^n \binom{\alpha}{n-\nu} \binom{\beta}{\nu} = \binom{\alpha+\beta}{n} . \quad (9.1)$$

En nuestro caso $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ luego

$$\sum_{\mu+\nu=n} \binom{\frac{1}{2}}{\nu} \binom{\frac{1}{2}}{\mu} = \binom{1}{n} = \begin{cases} 1, & \text{si } n = 0 \\ 1, & \text{si } n = 1 \\ 0, & \text{si } n > 1 \end{cases} ,$$

luego

$$(f(z))^2 = 1 \cdot (z-1)^0 + 1 \cdot (z-1)^1 = z = r e^{i\varphi} ,$$

con $-\pi < \varphi < +\pi$. Si despejamos $f(z)$ tenemos

$$f(z) = \sqrt[4]{r} e^{i\varphi/2} \quad \text{ó} \quad \sqrt[4]{r}(-1) e^{i\varphi/2} .$$

Ahora bien, la condición $f(1) = 1$ excluye la segunda posibilidad, quedando:

$$f(z) = \sqrt[4]{r} e^{i\varphi/2} , \quad \text{con } -\pi < \varphi < +\pi. \quad (9.2)$$

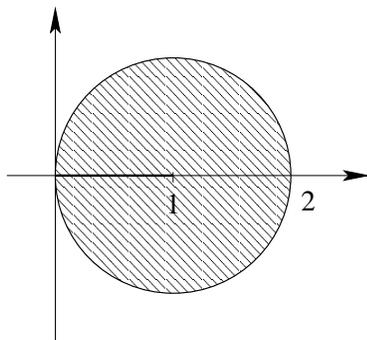


Figura 9.3: Círculo de convergencia del desarrollo de \sqrt{z} .

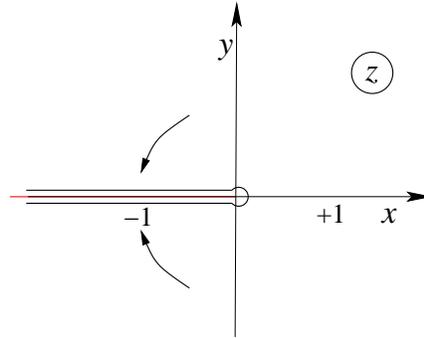


Figura 9.4: El eje real negativo para \sqrt{z} .

Usando la definición anterior de la raíz veamos lo que pasa al acercarnos el eje real negativo desde el plano complejo

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \sqrt{-1 + iy} = 1 \cdot e^{i\pi/2} = i \quad \lim_{y \rightarrow 0^-} \sqrt{-1 + iy} = 1 \cdot e^{-i\pi/2} = -i .$$

La función $f(z) = \sqrt{z}$ puede ser, al tomar $z = re^{i\varphi}$:

$$+\sqrt{r} e^{i\varphi/2} \quad \text{ó} \quad -\sqrt{r} e^{i\varphi/2} ,$$

una función así es conocida como bivaluada o bivalente, y cada posibilidad es conocida como ramas de \sqrt{z} .

Se acostumbra asignar a una rama el nombre de *rama principal*.

Notemos:

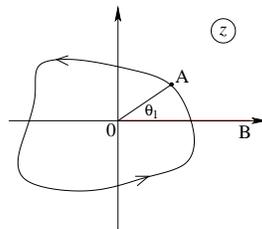


Figura 9.5: Función con línea de ramificación.

Plano z

$$A = re^{i\theta_1}$$

realizando un circuito \odot en torno al punto 0 se tiene

$$A = re^{i(\theta_1+2\pi)}$$

Plano w

$$\sqrt{A} = \sqrt{r} e^{i\theta_1/2}$$

$$\sqrt{r} e^{i(\theta_1/2+2\pi/2)} = \sqrt{r} e^{i\theta_1/2} (-1) = -\sqrt{A}$$

No hemos obtenido el mismo valor para \sqrt{A} en el plano w .

Limitando el valor de θ podemos hacer que la función sea univaluada o univalente. Esto se hace definiendo una línea de ramificación: Por ejemplo, si restringimos $0 \leq \theta < 2\pi$ estaremos sobre una rama de la función multivaluada \sqrt{z} . Si definimos $2\pi \leq \theta < 4\pi$ estaremos sobre la otra rama de \sqrt{z} . Este procedimiento equivale a establecer una línea de ramificación la cual no debe ser cruzada, línea de corte, línea roja en la figura. Notemos que la línea emerge del punto $z = 0$. Este punto se define como *punto de ramificación*. La línea de ramificación no es única. El circuito debe circundar al punto de ramificación si se quieren obtener valores bivaluados, es equivalente a traspasar la línea de corte.

9.2. Superficies de Riemann.

La función \sqrt{z} tiene dos superficies de Riemann. Notemos que dando dos vueltas en torno al origen volvemos al punto $f(A)$:

$$e^{i(\theta_1/2+4\pi/2)} \sqrt{r} = \sqrt{r} e^{i(\theta_1/2+2\pi)} = \sqrt{r} e^{i\theta_1/2} = \sqrt{A} .$$

Esto lo podemos visualizar mediante las dos superficies de Riemann: tomando dos superficies cortamos cada una en la línea $0 \rightarrow B$, ver figura, luego unimos la parte superior de una con la inferior de la otra.

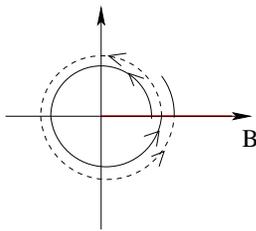


Figura 9.6: Después de dos vueltas se vuelve al mismo punto.

Superficies de Riemann

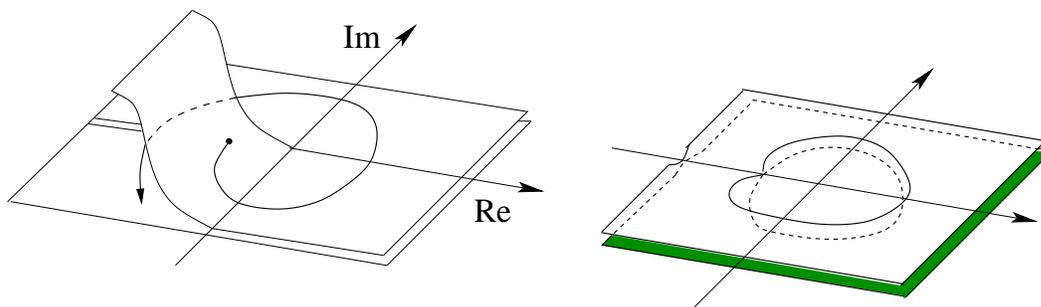


Figura 9.7: Las dos superficies de Riemann de \sqrt{z} .

Consideremos el producto

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} ,$$

¿Usando $\sqrt{}$ se llega a $\sqrt{}\sqrt{}$? (Donde sus valores tienen parte real positiva). La respuesta es NO, en efecto, por ejemplo

$$a = b = (1 + 2i)^2 = -3 + 4i \implies ab = (-3 + 4i)^2 = -7 - 24i ,$$

evaluemos las raíces

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{a} &= \sqrt[4]{b} = 1 + 2i , \\ \sqrt[4]{ab} &= 3 - 4i , \\ \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[4]{b} &= (1 + 2i)^2 = -3 + 4i .\end{aligned}$$

9.3. Otros puntos de ramificación.

Consideremos la función $f(z) = \sqrt{z - a}$, tenemos

$$\sqrt{z - a} = \sqrt{\rho} e^{i\theta/2} , \quad \text{si } z - a = \rho e^{i\theta} .$$

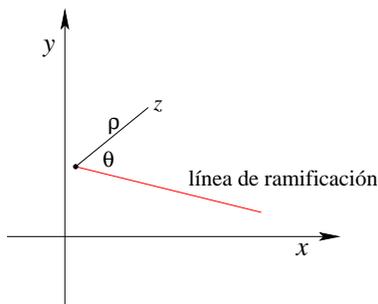


Figura 9.8: Punto de ramificación de $\sqrt{z - a}$.

$$A - a = \rho e^{i\theta_A} \implies \sqrt{A - a} = \sqrt{\rho} e^{i\theta_A/2} ,$$

considerando un giro en 2π

$$\sqrt{A - a} = \sqrt{\rho} e^{i\theta_A/2 + \pi} = -\sqrt{\rho} e^{i\theta_A/2} .$$

Luego, a es un punto de ramificación de *orden 2*. Es decir, dos superficies de Riemann.

¿Es $z = \infty$ punto de ramificación de $\sqrt{z - a}$? Tomemos $z \rightarrow \frac{1}{s}$

$$\sqrt{z - a} = \sqrt{\frac{1}{s} - a} = \sqrt{\frac{1 - as}{s}} = \frac{\sqrt{1 - as}}{\sqrt{s}} = \frac{1}{s} \sqrt{s} \sqrt{1 - as} ,$$

se ramifica en $s = 0$, por lo tanto, $z = \infty$ es punto de ramificación de $\sqrt{z - a}$.

Consideremos la función

$$f(z) = \sqrt{z^2 + pz + q} = \sqrt{(z-a)(z-b)} = \sqrt{(z-a)} \cdot \sqrt{(z-b)},$$

con $a \neq b$. Claramente a y b son puntos de ramificación. Para saber si $z = \infty$ es punto de ramificación reemplazamos $z \rightarrow \frac{1}{s}$ y estudiamos lo que pasa en $s = 0$:

$$f\left(\frac{1}{s}\right) = \sqrt{\frac{1}{s^2} + p\frac{1}{s} + q} = \frac{1}{s} \sqrt{1 + ps + qs^2} = \frac{1}{s} \sqrt{s-a'} \sqrt{s-b'}.$$

Esta función no se ramifica en $s = 0$, $s = 0$ no es raíz del polinomio $1 + ps + qs^2$, por lo tanto, $z = \infty$ no es punto de ramificación.

Consideremos

$$z = \frac{1}{2} \left(w + \frac{1}{w} \right), \quad (9.3)$$

Resolviendo para w

$$2wz = w^2 + 1 \Rightarrow w^2 - 2wz + 1 = 0 \Rightarrow w = z + \sqrt{z^2 + 1} = z + \sqrt{z+1}\sqrt{z-1},$$

tiene puntos de ramificación en $z = 1$ y $z = -1$.

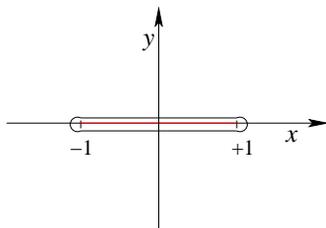


Figura 9.9: Dos puntos de ramificación.

Visto que $z = \infty$ no es punto de ramificación las líneas de ramificación no se extienden hasta el infinito y por lo tanto deben necesariamente unirse, figura 9.9.

Las líneas de ramificación pueden ser rectas o curvas, así pues podríamos tomar en vez de la recta de arriba, lo siguiente

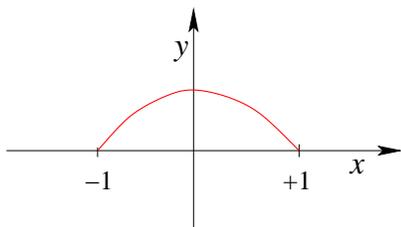


Figura 9.10: Otra línea de ramificación.

Podemos visualizar un corte desde $0 \rightarrow \infty$ usando la esfera de Riemann

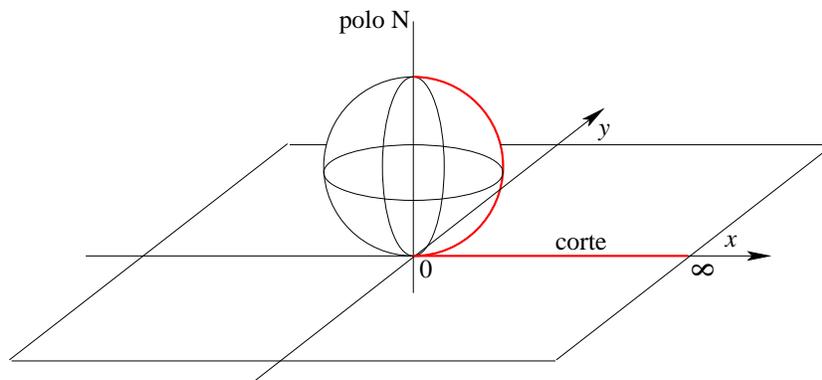


Figura 9.11: Línea de ramificación sobre la esfera de Riemann.

9.4. La función Logaritmo.

Consideremos la función $f(x) = \log(x)$ con $x > 0$. A continuación mostramos un gráfico de la función:

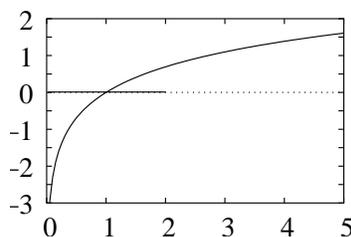


Figura 9.12: Función logaritmo sobre el eje real.

Al evaluar la derivada de la función

$$f'(x) = \frac{1}{x} = \frac{1}{1 + (x-1)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} (x-1)^{\nu},$$

Integramos, imponiendo que $\log(1) = 0$, lo cual anula cualquier constante de integración adicional

$$\log x = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu}}{\nu+1} (x-1)^{\nu+1}. \quad (9.4)$$

El intervalo de convergencia del desarrollo (9.4) es $0 < x < 2$.

Haciendo la prolongación analítica al plano complejo tenemos

$$f(z) = \log z = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu}}{\nu+1} (z-1)^{\nu+1} = \frac{z-1}{1} - \frac{(z-1)^2}{2} + \frac{(z-1)^3}{3} - + \dots \quad (9.5)$$

Comprobemos la expansión

$$\begin{aligned} \exp(f(z)) &= e^\Sigma = 1 + \frac{\Sigma}{1!} + \frac{\Sigma^2}{2!} + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{1!}(z-1) + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2!}\right)(z-1)^2 + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{6}\right)(z-1)^3 + \dots = z. \end{aligned}$$

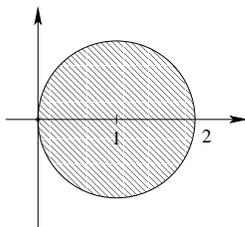


Figura 9.13: Radio de convergencia para (9.5).

Si evaluamos la derivada del desarrollo en serie corresponde $f'(z) = \frac{1}{z}$.

Consideremos

$$\boxed{f(z) = \int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta}} \quad (9.6)$$

con la prohibición de cruzar el eje real negativo.

La integral es independiente del camino porque la prohibición nos restringe a un dominio simplemente conexo

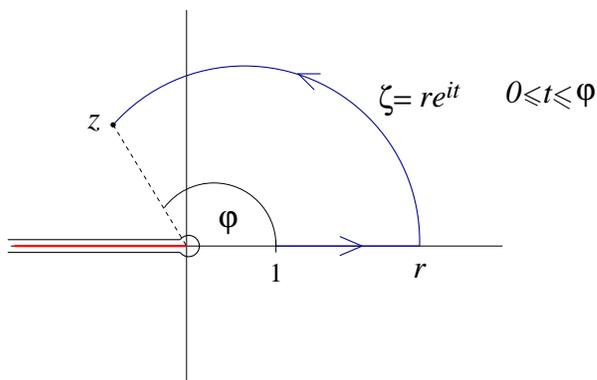


Figura 9.14: Camino de integración para (9.6).

Por lo tanto

$$\text{Log } z = \int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta} = \int_1^r \frac{dx}{x} + \int_0^\varphi \frac{re^{it}i dt}{re^{it}},$$

resolviendo obtenemos

$$\boxed{\text{Log } z = \text{Log } r + i\varphi, -\pi < \varphi < +\pi} \quad (9.7)$$

El punto $z = 0$ es un punto de ramificación de orden infinito:

$$\log z = \text{Log } z + 2k\pi i, \quad \text{con } k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (9.8)$$

El símbolo $\log z$ es un símbolo multivaluado para el cual no se ha especificado la rama. Pero ese símbolo satisface

$$\log z = w \iff z = e^w. \quad (9.9)$$

Siempre es cierto que $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$. Pero en general no es cierto que se cumpla que $\text{Log}(ab) = \text{Log}(a) + \text{Log}(b)$. Por ejemplo, sea $a = b = \exp(3\pi i/4)$

$$\begin{aligned} \text{Log } a + \text{Log } b &= \frac{3}{4}\pi i + \frac{3}{4}\pi i = \frac{3}{2}\pi i \\ \text{Log}(ab) &= \text{Log } \exp\left(\frac{3}{2}\pi i\right) = \text{Log } \exp\left(-\frac{1}{2}\pi i\right) = -\frac{1}{2}\pi i. \end{aligned}$$

$$\log(-1) = 0 + i(\pi + 2k\pi) = (2k + 1)\pi i.$$

9.5. La función Arcotangente.

Consideremos la integral

$$f(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}, \quad \text{con } -\infty < x < +\infty,$$

expandiendo en serie el denominador se tiene que

$$f(x) = \int_0^x \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu t^{2\nu} dt, \quad \text{con } -1 < t < +1 \text{ y } -1 < x < +1.$$

Integrando

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu x^{2\nu+1}}{2\nu+1}.$$

Prolongación analítica al plano complejo

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu z^{2\nu+1}}{2\nu+1}, \quad \text{con } |z| < 1.$$

La idea es

$$f(z) = \int_0^z \frac{d\zeta}{1+\zeta^2} \quad (9.10)$$

La integral es independiente del camino si se prohíbe cruzar las líneas $\text{Im}(\zeta) \geq +1$ y $\text{Im}(\zeta) \leq -1$.

$$\frac{1}{1+\zeta^2} = \frac{1}{2i} \left\{ \frac{1}{\zeta-i} - \frac{1}{\zeta+i} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{1+i\zeta} + \frac{1}{1-i\zeta} \right\}$$

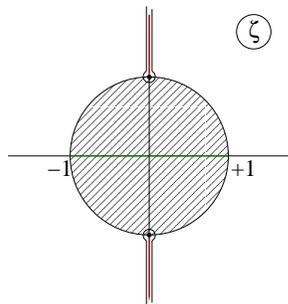


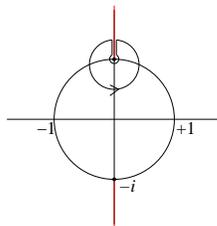
Figura 9.15: Camino de integración para (9.10).

Definición 9.1 Definimos la función

$$\operatorname{Arctan} z \equiv \int_0^z \frac{d\zeta}{1 + \zeta^2} . \quad (9.11)$$

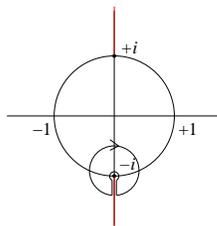
En el círculo de radio uno centrado en el origen.

Consideremos el camino

Figura 9.16: Camino de integración en torno a $+i$.

$$\oint_{\text{centro } +i} \frac{d\zeta}{1 + \zeta^2} = \frac{1}{2i} \oint \frac{d\zeta}{\zeta - i} = \frac{1}{2i} 2\pi i = \pi .$$

Consideremos el camino

Figura 9.17: Camino de integración en torno a $-i$.

$$\oint_{\text{centro } -i} \frac{d\zeta}{1 + \zeta^2} = \frac{1}{2i} \oint \frac{d\zeta}{\zeta + i} = \frac{1}{2i} 2\pi i = \pi .$$

Es decir, cada vez que se cruzan las fronteras prohibidas se aumenta en $+\pi$. Ramificación de orden infinito.

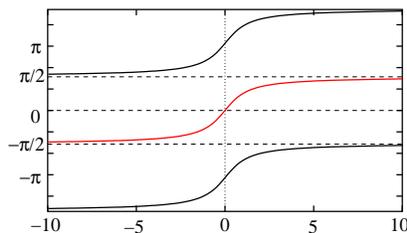


Figura 9.18: Función arcotangente.

Relación con la función logarítmica

Proposición 9.1

$$\int_0^z \frac{d\zeta}{1+i\zeta} = \frac{1}{i} \text{Log}(1+iz) \quad \int_0^z \frac{d\zeta}{1-i\zeta} = -\frac{1}{i} \text{Log}(1-iz), \quad (9.12)$$

o sea,

$$\boxed{\text{Arctan } z = \frac{1}{2i} (\text{Log}(1+iz) - \text{Log}(1-iz))} \quad (9.13)$$

Demostración

$$i \tan w = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{e^{iw} + e^{-iw}} = iz,$$

usando lo anterior

$$\frac{1+iz}{1-iz} = \frac{e^{iw} + e^{-iw} + e^{iw} - e^{-iw}}{e^{iw} + e^{-iw} - e^{iw} + e^{-iw}} = \frac{e^{iw}}{e^{-iw}} = e^{2iw}.$$

luego despejando

$$2iw = \log \frac{1+iz}{1-iz} \Rightarrow w = \arctan z = \frac{1}{2i} \log \frac{1+iz}{1-iz}.$$

Buscamos un símbolo $\text{Arctan } z$ univaluado. Sea $z = x + iy$, $\text{Log}(1+iz)$ está definido salvo en caso $\text{Im}(1+iz) = 0$ y $\text{Re}(1+iz) \leq 0$, es decir, siendo $1+iz = (1-y) + ix$ esto implica que está definida salvo en caso $x = 0$ e $y \geq 1$.

$\text{Log}(1-iz)$ está definido salvo en caso $\text{Im}(1-iz) = 0$ y $\text{Re}(1-iz) \leq 0$, es decir, siendo $1-iz = (1+y) - ix$ esto implica que está definida salvo en caso $x = 0$ e $y \leq 1$.

Además se cumple $\text{Arctan } 0 = 0 = \frac{1}{2i} (\text{Log } 1 - \text{Log } 1) = 0$.

q.e.d.

Capítulo 10

Desarrollo de Laurent.

versión final 1.1, 18 de Junio del 2003

10.1. Desarrollo en torno a $z_0 = 0$.

Consideremos ahora dominios con puntos singulares. Sea f univaluada y holomorfa en el anillo $r < |z| < R$ con centro en $z_0 = 0$. Nada se sabe de la función f fuera del anillo.

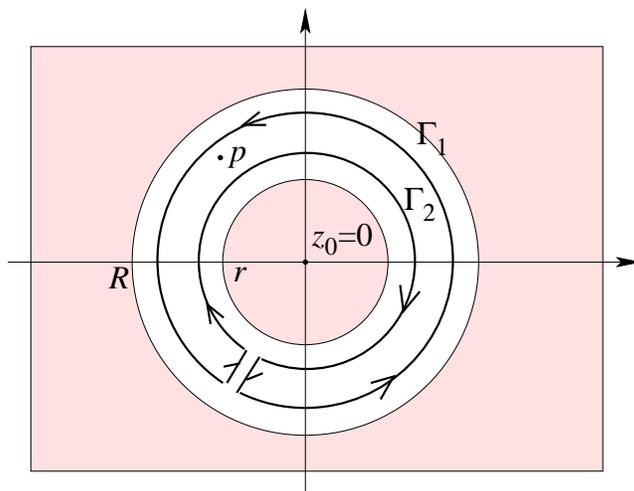


Figura 10.1: Región anular.

Sea p un punto de la región anular, aplicando el teorema de Cauchy se tiene

$$f(p) = \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\Gamma_1} \frac{f(z)dz}{z-p} - \int_{\Gamma_2} \frac{f(z)dz}{z-p} \right).$$

Escribamos lo siguiente:

$$\frac{1}{z-p} = \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{p}{z}} = \frac{1}{z} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{p}{z}\right)^{\nu}, \quad \text{converge en } |p| < |z|, \text{ i.e. } \Gamma_1.$$

$$\frac{1}{z-p} = -\frac{1}{p} \frac{1}{1-\frac{z}{p}} = -\frac{1}{p} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{z}{p}\right)^{\nu}, \quad \text{converge en } |z| < |p|, \text{ i.e. } \Gamma_2.$$

Luego

$$f(p) = \sum_{\nu=0}^{\infty} p^{\nu} \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1} \frac{f(z)dz}{z^{\nu+1}} \right) + \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{p^{\mu+1}} \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_2} z^{\mu} f(z)dz \right). \quad (10.1)$$

Si nombramos por a_{ν} al primer término entre paréntesis del lado derecho y por $a_{-\mu-1}$ al segundo término entre paréntesis podemos reescribir (10.1) como

$$f(p) = \sum_{\nu=0}^{\infty} p^{\nu} a_{\nu} + \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{p^{\mu+1}} a_{-\mu-1}, \quad (10.2)$$

Notemos que la primera serie converge para $|p| < R$ y la segunda converge en $|p| > r$. Hacemos el cambio de índice $\mu + 1 = \nu \Rightarrow \mu = \nu - 1$ y tenemos

$$f(p) = \sum_{\nu=0}^{\infty} p^{\nu} a_{\nu} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_{-\nu}}{p^{\nu}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} p^{\nu} a_{\nu} + \sum_{\nu=-\infty}^{-1} p^{\nu} a_{\nu}.$$

Por lo tanto,

$$f(p) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_{\nu} p^{\nu}, \quad (10.3)$$

siempre que el centro de expansión sea $z_0 = 0$, con los coeficientes:

$$a_{\nu} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\text{centro en } z_0 = 0} \frac{f(z)}{z^{\nu+1}}, \quad \nu = -\infty, \dots, +\infty. \quad (10.4)$$

10.2. Desarrollo en torno a z_0 .

Tomemos un centro z_0 arbitrario. Sea $f(\zeta)$ univalente y holomorfa en $r < |\zeta - z_0| < R$. Usemos $z = \zeta - z_0$

$$f(\zeta) = f(z + z_0) = g(z),$$

holomorfa en $r < |z| < R$. Sea $p = q + z_0$

$$f(p) = f(q + z_0) = g(q) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_{\nu} q^{\nu},$$

con

$$a_{\nu} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\text{centro } 0 \text{ en } z} \frac{g(z)dz}{z^{\nu+1}}.$$

Tenemos $dz = d\zeta$, luego:

$$a_{\nu} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\text{centro } z_0 \text{ en } \zeta} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{\nu+1}} d\zeta, \quad (10.5)$$

y

$$f(p) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_{\nu} (p - z_0)^{\nu} = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} (p - z_0)^{\nu} + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{-\nu} \frac{1}{(p - z_0)^{\nu}}. \quad (10.6)$$

La serie $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu}(p-z_0)^{\nu}$ converge en $|p-z_0| < R$ y la serie $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{-\nu}(p-z_0)^{-\nu}$ converge en $r < |p-z_0| < \infty$.

La serie converge automáticamente en el dominio anular más grande posible que sea compatible con cualquier prolongación analítica de f . Sobre $|p-z_0| = r$ y sobre $|p-z_0| = R$ existe por lo menos un obstáculo serio.

Un caso interesante es cuando $r = 0$, en este caso se admiten dos posibilidades,

- i f holomorfa en z_0 .
- ii f no holomorfa en z_0 , una singularidad aislada.

10.3. Unicidad del desarrollo de Laurent.

Supongamos que en el dominio anular $r < |z| < R$ se tiene:

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_{\nu}z^{\nu} = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} b_{\nu}z^{\nu} .$$

Sabemos que

$$\oint c_{\nu}z^{\nu} dz = \begin{cases} 0, & \text{si } \nu \neq -1 \\ c_{-1}2\pi i, & \text{si } \nu = -1, \end{cases}$$

luego concluimos que $a_{-1} = b_{-1}$. Para los demás coeficientes, multiplicamos por una potencia adecuada, z^{-k-1} , y tenemos

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_{\nu} \oint z^{-k-1+\nu} dz = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} b_{\nu} \oint z^{\nu-k-1} dz ,$$

sólo resulta algo no trivial si $-k-1+\nu = -1$, es decir, $\nu = k$ lo que implica $a_k 2\pi i = b_k 2\pi i \Rightarrow a_k = b_k$.

Hemos obtenido una representación de $f(z)$ como una suma de una serie de potencias ascendentes de $(z-z_0)$, más una serie de potencias descendentes de $(z-z_0)$. Ambas series convergen en la región anular ya que sus coeficientes son independientes de la forma de las curvas Γ_1 y Γ_2 .

10.4. Ejemplos.

Ejemplo 1 Consideremos la función

$$f(z) = \frac{1}{z-1} ,$$

desarrollémosla con centro en $z = 0$.

Esta función puede expandirse de dos maneras

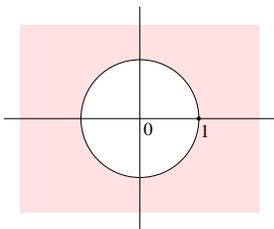


Figura 10.2: La función $f(z) = 1/(z - 1)$.

- i) En serie de Taylor para $|z| < 1$.
- ii) En serie de Laurent para $|z| > 1$.

i) Taylor para $|z| < 1$,

$$f(z) = -\frac{1}{1-z} = -\sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu}.$$

ii) Laurent para $|z| > 1$,

$$f(z) = \frac{1}{z} \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{z^{\nu+1}} = \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{z^{\mu}}.$$

Ejemplo 2 Consideremos la función

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)},$$

desarrollémosla con centro en $z = 0$

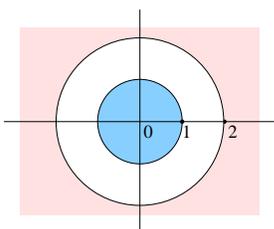


Figura 10.3: La función $f(z) = 1/(z-1)(z-2)$.

Esta función puede expandirse en tres regiones

- i) En serie de Taylor para $|z| < 1$.
- ii) En serie de Laurent para $1 < |z| < 2$.
- iii) En serie de Laurent para $|z| > 2$.

$$f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}.$$

i) Taylor para $|z| < 1$,

$$f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} = -\frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{z}{2}} + \frac{1}{1-z} = -\frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu} + \sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{\nu+1}}\right) z^{\nu}.$$

ii) Laurent para $1 < |z| < 2$,

$$f(z) = -\frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{z}{2}} - \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^{\nu}}{2^{\nu+1}} - \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{z^{\nu+1}},$$

la primera serie del lado derecho converge para $|z| < 2$ y la otra converge en $1 < |z| < \infty$, luego ambas convergen en $1 < |z| < 2$.

iii) Laurent para $|z| > 2$,

$$f(z) = \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{2}{z}} - \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^{\nu} - \frac{1}{z} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^{\nu} = \sum_{\nu=1}^{\infty} (2^{\nu-1} - 1) \frac{1}{z^{\nu}} = \frac{1}{z^2} + \dots$$

Como control comprobamos que $1/[(z-1)(z-2)] \approx 1/z^2$ para $z \gg 1$.

10.5. Definiciones.

Sea f univaluada y holomorfa en $0 < |z - z_0| < R$ Podemos desarrollar

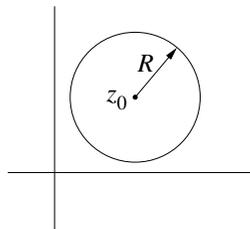


Figura 10.4: La región donde f es univaluada y holomorfa.

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} (z - z_0)^{\nu} + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{-\nu} (z - z_0)^{-\nu}.$$

Al segundo término, correspondiente a las potencias negativas, se le conoce como *la parte principal* del desarrollo de Laurent.

Definición 10.1 *El punto z_0 es un lugar regular si el desarrollo de Laurent en torno a z_0 tiene la parte principal nula.*

Definición 10.2 El punto z_0 es un polo de orden κ si la parte principal es del tipo

$$\sum_{\nu=1}^{\kappa} \frac{a_{-\nu}}{(z-z_0)^{\nu}}, \quad a_{\kappa} \neq 0, \quad a_{-\kappa-1} = a_{-\kappa-2} = \dots = 0.$$

Se trata de una singularidad no esencial ya que al multiplicar por $(z-z_0)^{\kappa}$ desaparecen los exponentes negativos:

$$(z-z_0)^{\kappa} f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} (z-z_0)^{\nu+\kappa} + \sum_{\nu=1}^{\kappa} \frac{a_{-\nu}}{(z-z_0)^{\kappa-\nu}}.$$

Definición 10.3 El punto z_0 es una singularidad esencial si la parte principal es infinita, es decir, existe una cantidad infinita de coeficientes $a_{-\nu} (\nu = 1, 2, 3, \dots, \infty) \neq 0$.

10.6. La función Arcosecante.

Consideremos la función

$$f(z) = \frac{1}{\operatorname{sen} z},$$

la función tiene singularidades en $k\pi$, con $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$. Es univaluada en las regiones $0 < |z| < \pi$, $\pi < |z| < 2\pi, \dots$. Planteamos

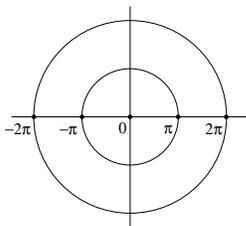


Figura 10.5: Singularidades de la función $1/\operatorname{sen} z$.

$$1 = \frac{\operatorname{sen} z}{z} \frac{z}{\operatorname{sen} z} = \left(1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - + \dots \right) \left(c_0 + \frac{c_2}{2!} z^2 + \frac{c_4}{4!} z^4 + \dots \right).$$

Igualando las distintas potencias

$$\begin{aligned} z^0 : & 1 \cdot c_0 = 1 \\ z^2 : & \frac{c_2}{2!} - \frac{c_0}{3!} \Rightarrow \frac{c_2}{2!} = \frac{1}{6} \\ z^4 : & \frac{c_4}{4!} - \frac{c_2}{2!} \frac{1}{3!} + \frac{c_0}{5!} \Rightarrow \frac{c_4}{4!} = \frac{7}{360} \\ z^6 : & \frac{c_6}{6!} = \frac{31}{15120}. \end{aligned}$$

Luego

$$\frac{1}{\operatorname{sen} z} = \frac{1}{z} + \frac{1}{6}z + \frac{7}{360}z^3 + \frac{31}{15120}z^5 + \dots = \frac{1}{z} + \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{c_{2\nu}}{2\nu!} z^{2\nu}, \quad (10.7)$$

este desarrollo, de Laurent con centro en cero, converge para $0 < |z| < \pi$.

Busquemos el desarrollo entre π y 2π , tenemos que $\operatorname{sen} z = -\operatorname{sen}(z \pm \pi)$, luego

$$-\frac{1}{\operatorname{sen}(z \pm \pi)} = \frac{1}{\operatorname{sen} z} = -\frac{1}{z \pm \pi} - \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{c_{2\nu}}{2\nu!} (z \pm \pi)^{2\nu-1}.$$

Definamos una función auxiliar que tenga desarrollo de Taylor. La función que estamos considerando es $g(z) = 1/\operatorname{sen} z$, si a esta función le restamos las partes principales que dan singularidades nos queda una función holomorfa:

$$f(z) = \frac{1}{\operatorname{sen} z} - \frac{1}{z} + \frac{1}{z - \pi} + \frac{1}{z + \pi},$$

esta función tiene en $|z| < 2\pi$ un desarrollo de Taylor, $f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} z^{\nu}$ convergente en $|z| < 2\pi$. Efectuemos el desarrollo de Taylor: (es único)

$$\frac{1}{\operatorname{sen} z} - \frac{1}{z} = \frac{1}{6}z + \frac{7}{360}z^3 + \frac{31}{15120}z^5 + \dots \quad |z| < \pi.$$

$$\frac{2z}{z^2 - \pi^2} = -\frac{2\pi}{\pi^2} \frac{1}{1 - \left(\frac{z}{\pi}\right)^2} = -\frac{2\pi}{\pi^2} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\pi}\right)^{2\nu} = -\frac{2z}{\pi^2} - \frac{2z}{\pi^2} - \frac{2z}{\pi^2} - \dots \quad |z| < \pi.$$

Combinándolas

$$f(z) = \left(\frac{1}{6} - \frac{2}{\pi^2}\right)z + \left(\frac{7}{360} - \frac{2}{\pi^4}\right)z^3 + \dots \quad |z| < 2\pi.$$

Tenemos

$$\frac{1}{\operatorname{sen} z} = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} z^{\nu} + \frac{1}{z} - \frac{2z}{z^2 - \pi^2}.$$

Pero

$$\frac{2z}{z^2 - \pi^2} = \frac{2z}{z^2} \frac{1}{1 - \left(\frac{\pi}{z}\right)^2} = \frac{2}{z} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{\pi}{z}\right)^{2\nu} \quad |z| > \pi,$$

luego:

$$\frac{1}{\operatorname{sen} z} = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} z^{\nu} + \frac{1}{z} - \frac{2}{z} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{\pi}{z}\right)^{2\nu}, \quad (10.8)$$

el primer término converge en $|z| < 2\pi = R$ y el segundo $r = \pi < |z| < \infty$ es decir, el desarrollo completo converge en $\pi < |z| < 2\pi$.

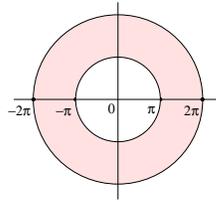


Figura 10.6: Zona de convergencia.

10.7. Funciones enteras.

Definición 10.4 La función entera es una función holomorfa en todo el plano y que por lo tanto posee un desarrollo de Taylor de radio infinito respecto a cualquier centro.

Estas funciones enteras se clasifican en

- 1) Polinomios de grado n : $\sum_{\nu=0}^n b_{\nu} s^{\nu}$ con $b_{\nu} \neq 0$.
- 2) Funciones enteras trascendentes $\sum_{\nu=0}^{\infty} b_{\nu} s^{\nu}$, con una cantidad infinita de coeficientes no nulos. Radio de convergencia ∞ para cualquier centro.

Teorema 10.1 Liouville

Si una función entera $g(z)$ es acotable, entonces $g(z) = \text{cte}$.

Demostración Si $|g(s)| \leq M$, entonces podemos acotar los coeficientes, usando (7.7), la desigualdad de Cauchy

$$|a_{\nu}| \leq \frac{M}{\rho^{\nu}},$$

con ρ arbitrario. Podemos demostrar que $a_{\nu} = 0$ para todo ν salvo a_0 , basta tomar ρ suficientemente grande. Lo anterior implica que $g(s) = a_0$.

q.e.d.

Corolario: Sea g entera y no constante. Sea R un radio, y sea $K > 0$ tan grande como se quiera, entonces existe p con $|p| > R$ tal que $|g(p)| > K$.

Teorema 10.2 Sobre polinomios

Sea g un polinomio de grado $n \geq 1$. Entonces para $K > 0$ tan grande como se quiera se puede indicar un radio R tal que $|g(z)| > K$ para todo $|z| > R$.

Demostración

$$b_n z^n = g(z) - b_{n-1} z^{n-1} - \dots - b_1 z - b_0 \quad b_n \neq 0.$$

Sea $|z| = \rho$

$$|b_n| \rho^n \leq |g(z)| + \sum_{\nu=0}^{n-1} |b_{\nu}| \rho^{\nu},$$

$$|g(z)| \geq \rho^n \left\{ |b_n| - \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{|b_\nu|}{\rho^{n-\nu}} \right\},$$

para ρ suficientemente grande

$$|g(z)| \geq \rho^n \frac{|b_n|}{2} > K, \quad |z| \geq \rho.$$

q.e.d.

Consecuencias: Un polinomio g de grado $n \geq 1$ tiene (al menos) un lugar nulo.

Demostración Si g nunca se anulara, entonces $1/g(z)$ sería entera y no constante. Por lo tanto, fuera de círculos muy grandes habría un punto p tal que

$$\left| \frac{1}{g(p)} \right| > 1 \iff |g(p)| < 1,$$

lo cual contradice el teorema anterior.

q.e.d.

La función e^z es entera trascendente, no tiene lugares nulo.

Teorema 10.3 Una función entera trascendente a lo largo de ciertos caminos hacia $s = \infty$, crece más rápidamente que $|s|^m$.

En otros términos: si g es entera y acotada por $|g(s)| \leq Ms^m$, entonces g es un polinomio.

Demostración

$$|b_\nu| \leq \frac{\text{Máx } |g|}{\rho^\nu} \leq \frac{M\rho^m}{\rho^\nu},$$

ya que el borde de un círculo de radio ρ la función g satisface que $|g| \leq M\rho^m$. Si $\nu > m$

$$|b_\nu| \leq \frac{M}{\rho^{\nu-m}},$$

tan pequeño como se quiera, luego $b_\nu = 0$ para $\nu = m + 1, \dots$

q.e.d.

Teorema 10.4 Casorati-Weierstrass

Si g es entera trascendente y c es un número complejo, entonces fuera de cualquier círculo hay puntos donde g toma aproximadamente el valor c con una precisión tan grande como se quiera.

En otros términos: después de prescribir $c \in \mathbb{C}$, $R > 0$ tan grande como se quiera y $\varepsilon > 0$ tan pequeño como se quiera, se puede encontrar un punto p tal que $|p| > R$ y $|g(p) - c| < \varepsilon$.

Demostración En $|s| > R$ sea $g(s) \neq c$, entonces $1/(g(s) - c)$ es holomorfa en $|s| > R$ por lo tanto acepta un desarrollo de Laurent

$$\frac{1}{g(s) - c} = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \gamma_{\nu} s^{\nu} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\gamma_{-\nu}}{s^{\nu}} + \sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_{\nu} s^{\nu} ,$$

luego

$$\frac{1}{g(s) - c} - \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\gamma_{-\nu}}{s^{\nu}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_{\nu} s^{\nu} ,$$

tomando el módulo a ambos lados

$$\left| \frac{1}{g(s) - c} \right| + \left| \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\gamma_{-\nu}}{s^{\nu}} \right| \geq \left| \sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_{\nu} s^{\nu} \right| > G ,$$

donde G es tan grande como se quiera, lo que podemos escribir como $G = 2/\varepsilon$ con ε tan pequeño como se quiera. El segundo término del lado izquierdo es muy pequeño si $|s|$ es grande, digamos que lo podemos acotar por $G/2$. El primer término del lado derecho, crece a lo largo de ciertos caminos al infinito. Luego, para cierto p , donde $|p|$ es grande, se tiene

$$\left| \frac{1}{g(p) - c} \right| + \frac{G}{2} \geq G \implies \left| \frac{1}{g(p) - c} \right| \geq G - \frac{G}{2} = \frac{2}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} .$$

Lo que finalmente conduce a $|g(p) - c| < \varepsilon$.

q.e.d.

Capítulo 11

Residuos.

versión final 1.2, 24 de Junio del 2003

11.1. Definición y teorema.

Consideremos la función $f(z)$ y su expansión en serie de Laurent

$$f(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_{\nu}(z - z_0)^{\nu} \quad 0 < |z - z_0| < R ,$$

se tiene

$$\oint_{\text{centro } z_0} f(z) dz = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_{\nu} \oint (z - z_0)^{\nu} dz = 2\pi i a_{-1} .$$

Definición 11.1 El residuo de la función $f(z)$ en z_0 , $\text{Res}_{z=z_0} f(z) \equiv a_{-1}$.

Teorema 11.1 Teorema de los residuos Sea D un dominio con un borde Γ , en el cual f es analítica, salvo en una cantidad finita de singularidades aisladas z_1, z_2, \dots, z_n . Entonces

$$\boxed{\oint_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{\mu=1}^n \text{Res}_{z=z_{\mu}} f(z)} \quad (11.1)$$

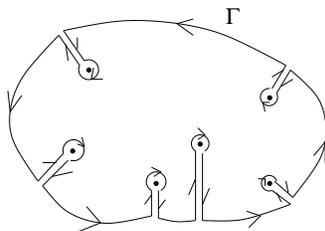


Figura 11.1: Región donde f es analítica.

Demostración Usando el teorema de Cauchy en el camino de la figura 11.1, se tiene

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz - \sum_{\mu=1}^n \oint_{|z-z_{\mu}|=\rho_{\mu}} f(z) dz = 0 ,$$

luego

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{\mu=1}^n \operatorname{Res}_{z=z_{\mu}} f(z) .$$

q.e.d.

Ejemplo Una aplicación del teorema, Consideremos la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} , \quad (11.2)$$

notemos que sobre el eje real no hay singularidades. Usemos un camino de integración como el siguiente.

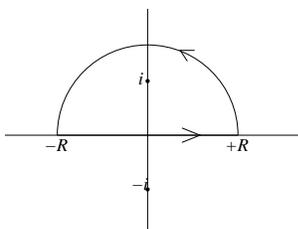


Figura 11.2: Camino de integración.

Consideremos la integral de la prolongación analítica al plano complejo de la función $1/(1+x^2)$ sobre el camino de la figura 11.2,

$$I = \oint \frac{dz}{1+z^2} ,$$

la función $f(z) = 1/(1+z^2)$ tiene polos de primer orden en $z = \pm i$, en efecto

$$f(z) = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i} \right) .$$

Tenemos

$$\operatorname{Res}_{z=+i} f(z) = \frac{1}{2i} , \quad \operatorname{Res}_{z=-i} f(z) = -\frac{1}{2i} ,$$

luego

$$I = \oint \frac{dz}{1+z^2} = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=+i} f(z) = 2\pi i \frac{1}{2i} = \pi ,$$

por lo tanto,

$$\oint \frac{dz}{1+z^2} = \int_{-R}^R \frac{dx}{1+x^2} + \int_{\text{arco}} \frac{dz}{1+z^2} = \pi .$$

Nos interesa cuando $R \rightarrow \infty$. Acotemos la segunda integral, sea $R > 1$,

$$\left| \int_{\text{arco}} \frac{dz}{1+z^2} \right| \leq \pi R \frac{1}{R^2-1} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 ,$$

donde hemos usado que $|z_1 + z_2| \geq |z_1| - |z_2|$ para acotar la cantidad subintegral. Por lo tanto

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi . \tag{11.3}$$

11.2. Funciones racionales.

Sea $f(z) = p(z)/q(z)$ el cociente entre dos polinomios tales que $gr(p) \leq gr(q) - 2$. Premisa $q(x) \neq 0$ para $-\infty < x < \infty$. Tomaremos el dominio

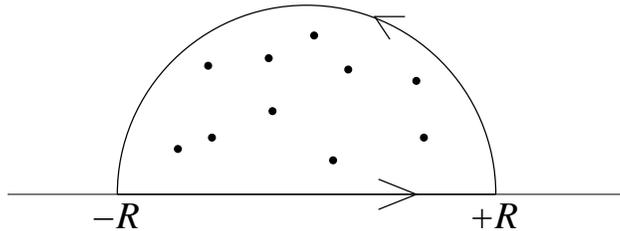


Figura 11.3: Camino de integración.

tan grande como sea necesario para que contenga todos los polos \bullet del semiplano superior. Entonces

$$2\pi i \sum_{\mu=1}^n \operatorname{Res}_{z=z_\mu} \frac{p(z)}{q(z)} = \oint \frac{p(z)}{q(z)} dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} dx + \int_{\text{arco}} \frac{p(z)}{q(z)} dz ,$$

ahora bien, sea $a_m \neq 0$ y $b_n \neq 0$

$$\frac{p(z)}{q(z)} = \frac{a_m z^m + \dots + a_0}{b_n z^n + \dots + b_0} = \frac{a_m}{b_n} \frac{1}{z^{n-m}} \frac{1 + \frac{a_{m-1}}{a_m} \frac{1}{z} + \dots + \frac{a_0}{a_m} \frac{1}{z^m}}{1 + \frac{b_{n-1}}{b_n} \frac{1}{z} + \dots + \frac{b_0}{b_n} \frac{1}{z^n}} ,$$

el valor absoluto de el último término tiende a +1 cuando $|z| \rightarrow \infty$ si $n \geq m + 2$, luego

$$\left| \int_{\text{arco}} \frac{p(z)}{q(z)} dz \right| \leq \pi R \operatorname{Máx}_{|z|=R} \left| \frac{p}{q} \right| = \pi R \left| \frac{a_m}{b_n} \right| \frac{1}{R^{n-m}} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 .$$

11.3. Funciones trigonométricas.

Consideremos e^{iz} , $\operatorname{sen} z$ y $\operatorname{cos} z$. Acotemos las diferentes funciones comenzando por la exponencial

$$|e^{iz}| = e^{\operatorname{Re}[iz]} = e^{-y} \xrightarrow{y \rightarrow +\infty} \infty ,$$

está acotada en el plano superior $y \geq 0$, por lo tanto, $|e^{iz}| \leq 1$. En cambio

$$\operatorname{sen} z = \operatorname{sen}(x + iy) = \underbrace{\operatorname{sen} x \cosh y}_{\text{crece}} + i \cos x \underbrace{\operatorname{senh} y}_{\text{crece}} ,$$

al tomar módulo tenemos que $|\operatorname{sen} z|$ crece cuando $y \rightarrow \pm\infty$, ya que las dos funciones hiperbólicas crecen. Análogamente

$$\cos z = \cos(x + iy) = \cos x \underbrace{\cosh y}_{\text{crece}} - i \operatorname{sen} x \underbrace{\sinh y}_{\text{crece}},$$

por lo tanto, $|\cos z|$ crece cuando $y \rightarrow \pm\infty$.

Ejemplo Evaluemos la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx. \tag{11.4}$$

Para calcular esta integral estudiaremos la integral sobre el eje real entre $-R$ y $+R$, mediante la integración de la función $\operatorname{sen} z/z$ sobre diversos caminos. Esta función es holomorfa

$$\frac{\operatorname{sen} z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - + \dots,$$

no tiene polos. Sin embargo, cuando tomemos $R \rightarrow \infty$ deberemos acotar la función y en base a lo expuesto al comienzo de esta sección es mejor escribir las funciones trigonométricas como combinaciones de exponenciales complejas.

$$\frac{\operatorname{sen} z}{z} = \frac{e^{iz}}{2iz} - \frac{e^{-iz}}{2iz}.$$

Ahora bien, e^{iz} y e^{-iz} están acotadas para $y \geq 0$ y para $y \leq 0$ respectivamente. Además, las dos funciones de la derecha tienen un polo de primer orden en $z = 0$.

En base a todo esto consideremos los caminos cerrados de la figura siguiente para lograr nuestro objetivo (esta elección no es única). Tenemos

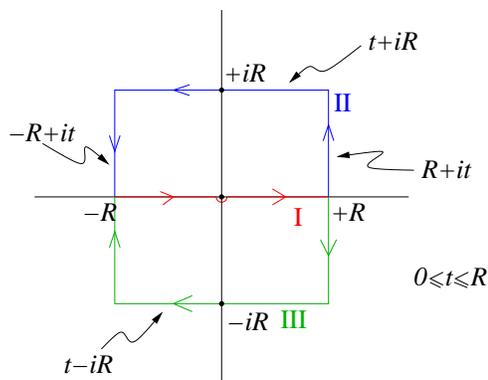


Figura 11.4: Camino de integración.

$$\int_I \frac{\operatorname{sen} z}{z} dz = \int_I \frac{e^{iz}}{2iz} dz - \int_I \frac{e^{-iz}}{2iz} dz.$$

Para evaluar estas integrales lo hacemos eligiendo caminos **cerrados** apropiados.

Para “acotar bien” elegimos para la primera integral

$$\oint_{I+II} \frac{e^{iz}}{2iz} dz ,$$

y para la segunda

$$\oint_{I+III} \frac{e^{-iz}}{2iz} dz ,$$

en el sentido horario. (Negativo.)

Tenemos

$$\begin{aligned} \oint_{I+II} \frac{e^{iz}}{2iz} dz &= 2\pi i \operatorname{Res}_{z=0} \frac{e^{iz}}{2iz} = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=0} \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{z} + 1 + \frac{z}{2!} + \dots \right) \\ &= 2\pi i \frac{1}{2i} = \pi , \end{aligned}$$

es decir,

$$\int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{2ix} dx + \int_{\operatorname{arco}-\varepsilon, \varepsilon} \frac{e^{iz}}{2iz} dz + \int_{+\varepsilon}^{+R} \frac{e^{ix}}{2ix} dx + \int_{II} \frac{e^{iz}}{2iz} dz = \pi .$$

Acotemos la última integral:

- Segmentos verticales $|e^{iz}| = |e^{\pm Ri + iit}| = e^{-t}$.
- Segmentos horizontales $|e^{iz}| = |e^{i(t+iR)}| = e^{-R}$.

$$\begin{aligned} \left| \int_{II} \frac{e^{iz}}{2iz} dz \right| &\leq 2 \int_0^R \frac{e^{-t}}{R} dt + 2R \frac{e^{-R}}{R} \\ &\leq 2 \frac{1}{R} \left(-e^{-t} \Big|_0^R \right) + 2e^{-R} = \frac{2}{R} (1 - e^{-R}) + 2e^{-R} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 . \end{aligned}$$

En el límite $\varepsilon \rightarrow 0$ la integral sobre el arco central es igual a $\pi/2$ y por lo tanto nos queda

$$\int_{-R}^R \frac{e^{ix}}{2ix} dx \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2} .$$

Consideremos el segundo camino cerrado $I + III$, este camino no contiene polos de primer orden y por lo tanto su residuo es igual a cero, es decir,

$$\oint_{I+III} \frac{e^{-iz}}{2iz} dz = 0 .$$

Descomponiendo la integral cerrada tenemos

$$\int_{-R}^R \frac{e^{-ix}}{2ix} dx + \int_{III} \frac{e^{-iz}}{2iz} dz + \frac{\pi}{2} = 0 .$$

Acotando como lo hicimos anteriormente tenemos:

$$\left| \int_{III} \frac{e^{-iz}}{2iz} dz \right| \leq 2 \int_0^R \frac{e^{-t}}{R} + 2R \frac{e^{-R}}{R} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 ,$$

por lo tanto,

$$\int_{-R}^R \frac{e^{-ix}}{2ix} dx \xrightarrow{R \rightarrow \infty} -\frac{\pi}{2},$$

y nos queda finalmente

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \pi} \quad (11.5)$$

En todos los casos anteriores hemos definido la integral entre $-\infty$ e ∞ de una de las siguientes maneras:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(t) dt = \lim_{R \rightarrow \infty, \varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-R}^{-\varepsilon} f(t) dt + \int_{\varepsilon}^R f(t) dt \right\}, \quad (11.6)$$

a esta forma se le llama el valor principal de Cauchy de la integral.

11.4. Polos, residuos y lugares nulos.

Sea $z_0 = 0$ el centro de desarrollo de las funciones $g(z)$ y $h(z)$, consideremos

$$\frac{g(z)}{h(z)} = \frac{b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots}{c_k z^k + c_{k+1} z^{k+1} + \dots},$$

con $b_0 \neq 0$, $c_k \neq 0$ con $k \geq 1$ y $c_0 = c_1 = \dots = c_{k-1} = 0$. Esta función tiene en $z = 0$ un polo de orden k .

$$\frac{g(z)}{h(z)} = \frac{1}{z^k} \underbrace{\frac{b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots}{c_k + c_{k+1} z + \dots}}_{\text{holomorfa en } 0},$$

es decir,

$$\frac{g(z)}{h(z)} = \frac{1}{z^k} \left(a_{-k} + a_{-k-1} z + \dots + \underbrace{a_{-1}}_{\operatorname{Res}_{z=0} \frac{g}{h}} z^{k-1} + a_0 z^k + \dots \right).$$

Queremos determinar el coeficiente a_{-1} , tenemos

$$b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots = (c_k + c_{k+1} z + \dots)(a_{-k} + a_{-k+1} z + \dots),$$

despejando para potencias iguales

$$\begin{aligned} c_k a_{-k} &= b_0 \\ c_{k+1} a_{-k} + c_k a_{-k+1} &= b_1 \\ c_{k+2} a_{-k} + c_{k+1} a_{-k+1} + c_k a_{-k+2} &= b_2 \\ &\vdots = \vdots \\ c_{2k-1} a_{-k} + \dots + c_k \underbrace{a_{-1}} &= b_{k-1}. \end{aligned}$$

Son k ecuaciones lineales para k incógnitas. Por la regla de Kramer tenemos para el coeficiente a_{-1} :

$$a_{-1} = \frac{1}{C_k^k} \begin{vmatrix} c_k & 0 & \dots & 0 & b_0 \\ c_{k+1} & c_k & \dots & 0 & b_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & c_k & b_{k-2} \\ c_{2k-1} & c_{2k-2} & \dots & c_{k+1} & b_{k-1} \end{vmatrix}, \quad (11.7)$$

donde C_k^k es el determinante de los coeficientes. Esta relación, (11.7), nos da una relación explícita para el residuo.

Sea $k = 1$, entonces

$$a_{-1} = \frac{b_0}{c_1} = \frac{g(0)}{h'(0)}, \quad \text{polo de orden } k \leq 1.$$

Sea $k = 2$, entonces

$$a_{-1} = \frac{1}{C_2^2} (c_2 b_1 - c_3 b_0) = \frac{\frac{1}{2} h''(0) g'(0) - \frac{1}{6} h'''(0) g(0)}{\frac{1}{4} (h''(0))^2} = \frac{6g'(0)h''(0) - 2g(0)h'''(0)}{3(h''(0))^2}.$$

Caso particular $g = h' = kc_k z^{k-1} + \dots$ con $b_{k-1} \neq 0$, mientras $b_0 = b_1 = \dots = b_{k-2} = 0$, entonces

$$a_{-1} = \operatorname{Res}_{z=0} \frac{h'}{h} = \frac{kC_k^k}{C_k^k} = k,$$

es decir, el residuo es igual a la multiplicidad del lugar nulo en 0.

Proposición 11.1 Si en z_0 una función f tiene un lugar nulo de multiplicidad k , entonces la derivada logarítmica f'/f tiene en z_0 un polo de primer orden con residuo igual a k .

Demostración Tenemos

$$f(z) = a_k(z - z_0)^k + a_{k+1}(z - z_0)^{k+1} + \dots,$$

su derivada

$$f'(z) = ka_k(z - z_0)^{k-1} + (k+1)a_{k+1}(z - z_0)^k + \dots.$$

La derivada logarítmica

$$\frac{f'}{f} = \frac{k}{z - z_0} \left(\frac{1 + \dots}{1 + \dots} \right) = \frac{k}{z - z_0} (1 + \text{potencias crecientes } z - z_0),$$

lo cual implica

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} \frac{f'}{f} = k.$$

q.e.d.

Proposición 11.2 Sea $N = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$ donde $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ son las multiplicidades de los ceros z_1, z_2, \dots, z_n de f , respectivamente. Entonces

$$N = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f'(z)}{f(z)} dz . \quad (11.8)$$

Demostración Del teorema de los residuos

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{\nu} \operatorname{Res}_{z_{\nu}} \frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{\nu} \alpha_{\nu} = N ,$$

la penúltima igualdad corresponde a la proposición anterior.

q.e.d.

Proposición 11.3 Si h tiene en z_0 un polo de orden m entonces h'/h tiene en z_0 un polo de primer orden con residuo igual a $-m$.

Demostración Hagamos $z_0 = 0$, luego

$$h(z) = a_{-m}z^{-m} + \cdots + a_0 + a_1z + a_2z^2 + \cdots , \quad a_{-m} \neq 0 ,$$

la derivada de h

$$h'(z) = -ma_{-m}z^{-m-1} + \cdots + 0 + a_1 + 2a_2z + \cdots , \quad a_{-m} \neq 0 .$$

La derivada logarítmica

$$\frac{h'(z)}{h(z)} = \frac{-ma_{-m}z^{-m-1}}{a_{-m}z^{-m}} \frac{1 + \text{potencia creciente de } z}{1 + \text{potencia creciente de } z} = -\frac{m}{z} [1 + \mathcal{O}(z)] ,$$

el residuo en z_0

$$\operatorname{Res}_{z_0} \frac{h'(z)}{h(z)} = -m .$$

q.e.d.

Teorema 11.2 Sea $h(z) \neq 0$ sobre la curva Γ , cerrada, (sin puntos dobles). Sea h univalente y holomorfa en el interior de Γ , salvo en z_0, z_1, \dots, z_n donde existen polos. Entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{h'(z)}{h(z)} dz = N - P . \quad (11.9)$$

con $N = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$ y $P = \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n$, donde $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ son las multiplicidades de ceros de h y $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ son los órdenes de los polos de h .

11.5. Ejemplos.

Ejemplo I Evaluemos la integral

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{1 + \operatorname{sen}^2 \theta}.$$

Tenemos

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{1 - \frac{1}{4}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})^2} = 4 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{6 - e^{2i\theta} - e^{-2i\theta}}.$$

Pasemos al plano complejo escribiendo $z = |z| e^{2i\theta}$ diferenciando $d\theta = dz/2iz$, por lo tanto,

$$I = 4 \int_{\Gamma} \frac{dz}{2iz(6 - z - z^{-1})} = 2i \int_{\Gamma} \frac{dz}{z^2 - 6z + 1} = 2i \int_{\Gamma} \frac{dz}{(z - z_1)(z - z_2)},$$

con $z_1 = 3 - 2\sqrt{2}$ y $z_2 = 3 + 2\sqrt{2}$.

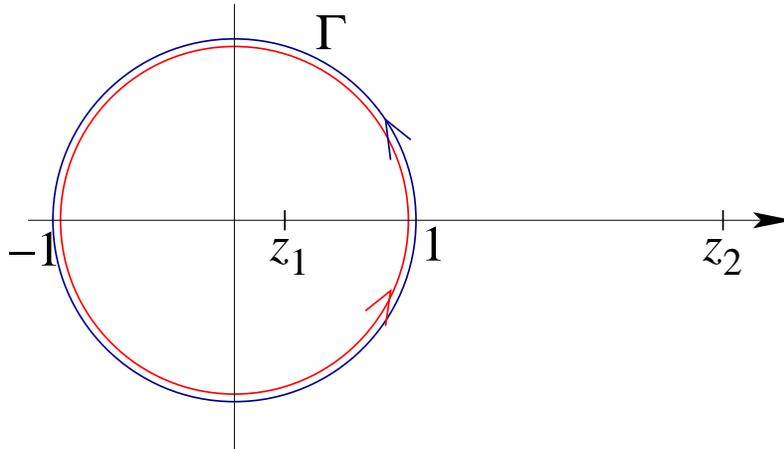


Figura 11.5: Camino de integración ejemplo I.

Notemos que el camino Γ da dos vueltas en torno al círculo.

$$I = 2i \cdot 2\pi i \operatorname{Res}_{z=z_1} = 2i \cdot 2\pi i \frac{2}{(3 - 2\sqrt{2} - 3 - 2\sqrt{2})},$$

el dos en la última fracción corresponde a que las vueltas son dos.

$$I = 4\pi \frac{2}{4\sqrt{2}} = \pi\sqrt{2}.$$

Finalmente

$$\boxed{\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{1 + \operatorname{sen}^2 \theta} = \pi\sqrt{2}} \quad (11.10)$$

Ejemplo II Evaluemos la integral

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx .$$

Sea $\sqrt[*]{z}$ lo que se obtiene por prolongación hacia el semiplano superior y luego en torno al origen. Elegimos *ad-hoc* la univaluación del símbolo $\sqrt{}$.

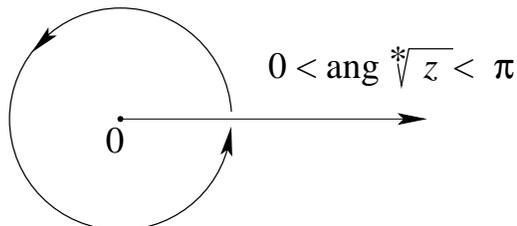


Figura 11.6: Elección de rama.

Consideremos el siguiente camino de integración

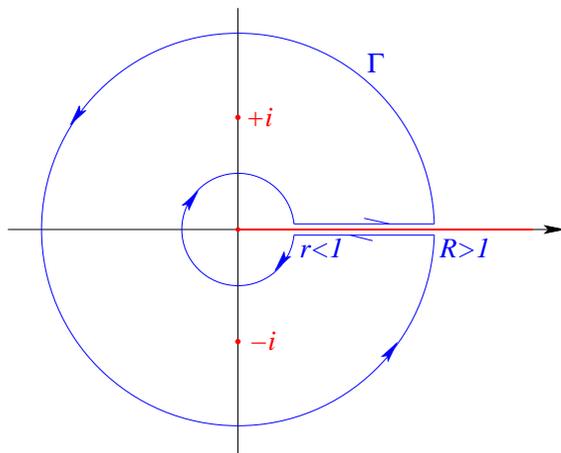


Figura 11.7: Camino de integración ejemplo II.

Los polos de $1/(1+z^2)$ son $+i$ y $-i$. Por el teorema del residuo tenemos

$$\oint_{\Gamma} \frac{\sqrt[*]{z}}{1+z^2} dz = 2\pi i \sum_{\nu=1}^2 \operatorname{Res}_{z=z_{\nu}} \frac{\sqrt[*]{z}}{1+z^2} .$$

$$\operatorname{Res}_{z=+i} \frac{\sqrt[*]{z}}{1+z^2} = \sqrt{i} \operatorname{Res}_{z=+i} \frac{1}{1+z^2} = \sqrt{i} \operatorname{Res}_{z=+i} \left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i} \right) = \frac{\sqrt{i}}{2i}$$

$$\operatorname{Res}_{z=-i} \frac{\sqrt[*]{z}}{1+z^2} = -\frac{\sqrt{-i}}{2i} .$$

Evaluemos las integrales sobre ambas circunferencias, la de radio r y la de radio R . Tenemos

$$\left| \oint_{C_R} \right| \leq 2\pi R \sqrt{R} \frac{1}{R^2 - 1} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 ,$$

donde hemos usado $|1 + z^2| \geq |z|^2 - 1$. Para la segunda integral

$$\left| \oint_{C_r} \right| \leq 2\pi r \sqrt{r} \frac{1}{1 - r^2} \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0 .$$

Además,

$$\int_r^R \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx - \int_R^r \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx + \oint_{C_r} + \oint_{C_R} = 2\pi i \left(\frac{\sqrt{i}}{2i} - \frac{\sqrt{-i}}{2i} \right) .$$

En el límite $r \rightarrow 0$ y $R \rightarrow \infty$ tenemos

$$2 \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx = \pi(\sqrt{i} - \sqrt{-i}) = \pi\sqrt{i}(1-i) = \pi \frac{(1+i)}{\sqrt{2}}(1-i) = \pi \frac{2}{\sqrt{2}} .$$

Finalmente

$$\boxed{\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}} \tag{11.11}$$

Ejemplo III Evaluemos la integral

$$I = \int_{-1}^1 \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}} .$$

No debemos incluir puntos de ramificación en la curva.

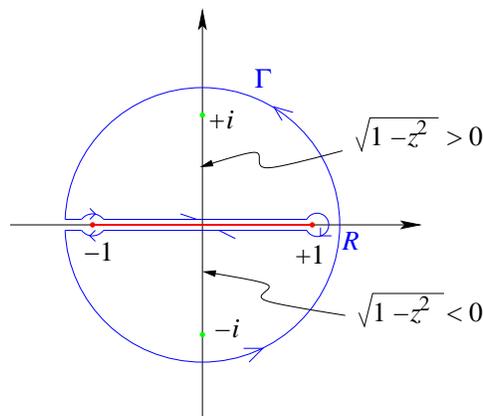


Figura 11.8: Camino de integración ejemplo III.

Tenemos por el teorema del residuo

$$\oint_{\Gamma} \frac{dz}{(1+z^2)\sqrt{1-z^2}} = 2\pi i \sum_{\nu=1}^2 \text{Res}_{z=z_\nu} \frac{1}{(1+z^2)\sqrt{1-z^2}} .$$

Separaremos la integral por pedazos

$$2 \int_{-1+r}^{+1-r} \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}} - \oint_{C_r, \text{centro } +1} - \oint_{C_r, \text{centro } -1} + \oint_{C_R} = 2\pi i \sum_{\nu=1}^2 \operatorname{Res}_{z=z_\nu} \frac{1}{(1+z^2)\sqrt{1-z^2}}.$$

Acotemos la integrales

$$\left| \oint_{C_R} \right| \leq 2\pi R \operatorname{Máx}_{|z|=R} \left| \frac{1}{(1+z^2)\sqrt{1-z^2}} \right| \leq 2\pi R \frac{1}{R^2-1} \frac{1}{\sqrt{R^2-1}} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0,$$

donde hemos usado $|1 \pm z^2| \geq |z^2| - 1$. Las integrales con centro en $z = \pm 1$ y radio r

$$\left| \oint_{C_r} \right| \leq 2\pi R \operatorname{Máx}_{|z \mp 1|=r} \left| \frac{1}{(1+z^2)\sqrt{1 \pm z}} \right| \frac{1}{\sqrt{r}} \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0.$$

Luego en el límite $r \rightarrow 0$ y $R \rightarrow \infty$ tenemos

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}} = \pi i \sum_{\nu=1}^2 \operatorname{Res}_{z=z_\nu} \frac{1}{(1+z^2)\sqrt{1-z^2}}.$$

Los residuos

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z=+i} \frac{1}{(z+i)(z-i)\sqrt{1-z^2}} &= \frac{1}{2i} \frac{1}{\sqrt{1-i^2}} = +\frac{1}{2i} \frac{1}{(+\sqrt{2})} \\ \operatorname{Res}_{z=-i} \frac{1}{(z+i)(z-i)\sqrt{1-z^2}} &= -\frac{1}{2i} \frac{1}{\sqrt{1-(-i)^2}} = -\frac{1}{2i} \frac{1}{(-\sqrt{2})}, \end{aligned}$$

Ver figura 11.8 para entender el signo de la raíz. Finalmente tenemos

$$\boxed{\int_{-1}^1 \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}} dx = \pi i \frac{1}{2\sqrt{2}i} \cdot 2 = \frac{\pi}{\sqrt{2}}} \quad (11.12)$$

Ejemplo IV Evaluemos la integral

$$I = \int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x} dx, \quad 0 < p < 1.$$

Consideremos la integral

$$\oint \frac{z^{p-1}}{1+z} dz.$$

Tenemos que $z = 0$ es un punto de ramificación de z^{p-1} : $z^{p-1} = e^{(p-1)\log z}$, multivaluada. Tomamos $\log z = \operatorname{Log}|z| + i\varphi$ con $0 < \varphi < 2\pi$, ahora si

$$z^{p-1} = e^{(p-1)\operatorname{Log}|z|} \cdot e^{i\varphi(p-1)},$$

con $0 < \varphi < 2\pi$, es univaluada. Tomemos la línea de corte a lo largo del eje real. El integrando tiene un polo simple en $z = -1$ dentro del contorno Γ mostrado en la figura 11.9.

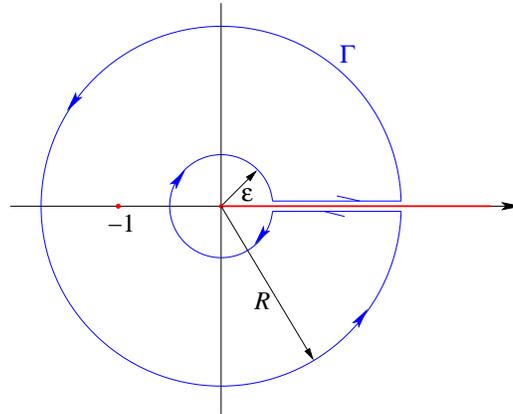


Figura 11.9: Camino de integración ejemplo IV.

Evaluemos el residuo en $z = -1 = e^{i\pi}$

$$\operatorname{Res}_{z=-1} \frac{z^{p-1}}{1+z} = e^{i\pi(p-1)} .$$

Luego

$$\oint_{\Gamma} \frac{z^{p-1}}{1+z} dz = 2\pi i e^{i\pi(p-1)} ,$$

separando las integrales

$$\int_{\varepsilon}^R \frac{x^{p-1}}{1+x} dx + \int_0^{2\pi} \frac{(Re^{i\theta})^{p-1} i Re^{i\theta} d\theta}{1+Re^{i\theta}} + \int_R^{\varepsilon} \frac{(xe^{2\pi i})^{p-1}}{1+xe^{2\pi i}} dx + \int_{2\pi}^0 \frac{(\varepsilon e^{i\theta})^{p-1} i \varepsilon e^{i\theta} d\theta}{1+\varepsilon e^{i\theta}} = 2\pi i e^{i\pi(p-1)} .$$

Acotamos

$$\left| \int_0^{2\pi} \frac{(Re^{i\theta})^{p-1} i Re^{i\theta} d\theta}{1+Re^{i\theta}} \right| \leq 2\pi R \frac{R^{p-1}}{R-1} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 , \quad p < 1 ,$$

usando $|1+Re^{i\theta}| \geq R-1$. La otra integral en torno al origen

$$\left| \int_0^{2\pi} \frac{(\varepsilon e^{i\theta})^{p-1} i \varepsilon e^{i\theta} d\theta}{1+\varepsilon e^{i\theta}} \right| \leq 2\pi \varepsilon \frac{\varepsilon^{p-1}}{1-\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 ,$$

usando $|1+\varepsilon e^{i\theta}| \geq 1-\varepsilon$. Luego

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx + \int_{\infty}^0 \frac{x^{p-1} e^{2\pi i(p-1)}}{1+xe^{2\pi i}} dx &= 2\pi i e^{i\pi(p-1)} \\ \int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx - \int_0^{\infty} \frac{x^{p-1} e^{2\pi i p}}{1+x} dx &= -2\pi i e^{i\pi p} , \\ (1 - e^{2\pi i p}) \int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx &= -2\pi i e^{i\pi p} , \\ \int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx &= -2\pi i \frac{e^{i\pi p}}{1 - e^{2\pi i p}} = -2\pi i \frac{1}{e^{-i\pi p} - e^{i\pi p}} . \end{aligned}$$

Finalmente, tenemos

$$\boxed{\int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(p\pi)}} \quad (11.13)$$

11.5.1. Residuos de un polo de orden m .

Si $f(z)$ tiene un polo de orden m en $z = z_0$, donde m es un entero positivo, entonces el residuo de $f(z)$ en $z = z_0$ es

$$\boxed{\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-z_0)^m f(z)]} \quad (11.14)$$

donde la derivada de orden cero de la función se entiende como la función misma y $0! = 1$.

11.6. Valor principal de Cauchy.

Consideremos la función $u(x) = 1/x$. No podemos integrar directamente $\int_{-1}^1 dx/x$. Pero sí podemos hacer lo siguiente

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\int_{-1}^{-\delta} \frac{dx}{x} + \int_{+\delta}^{+1} \frac{dx}{x} \right) \equiv \mathcal{P} \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x} = 0,$$

esto corresponde a tomar el valor principal de Cauchy de la integral, para un δ tan pequeño como se quiera. Consideremos el gráfico siguiente:

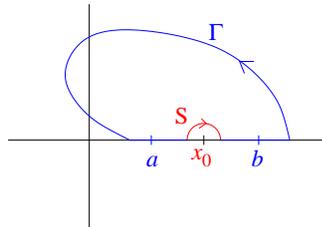


Figura 11.10: Camino de integración.

Sea f univaluada y holomorfa en un dominio simplemente conexo en el cual se encuentra la curva Γ .

Consideremos el desarrollo de Laurent en x_0 :

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z-x_0} + a_0 + a_1(z-x_0) + \dots$$

Definición 11.2 Definamos el valor principal de Cauchy como

$$\mathcal{P} \int_a^b f = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \int_a^{x_0-\delta} f + \int_{x_0+\delta}^b f \right\}. \quad (11.15)$$

Sea Γ_1 una curva cerrada que no incluya a x_0 , entonces

$$\oint_{\Gamma_1} f(z) dz = 0 .$$

Sea Γ_2 una curva cerrada que si incluye a x_0 , entonces

$$\oint_{\Gamma_2} f(z) dz = 2\pi i a_{-1} .$$

Consideremos

$$\int_S f = \int_{\varphi=\pi}^0 \left(\frac{a_{-1}}{\delta e^{i\varphi}} + \underbrace{a_0 + \dots}_{=0 \text{ si } \delta \rightarrow 0} \right) i\delta e^{i\varphi} d\varphi ,$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_S f = -i \int_0^\pi a_{-1} d\varphi = -i a_{-1} \pi .$$

Definición 11.3 Definamos el valor principal de Cauchy sobre la curva Γ

$$\oint_{\Gamma} f = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \oint_{\Gamma_1} f - \int_S f \right\} = 0 + i\pi a_{-1}$$

$$= i\pi \operatorname{Res}_{z=x_0} f = \frac{1}{2} \left\{ \oint_{\Gamma_1} f + \oint_{\Gamma_2} f \right\} .$$

Capítulo 12

Funciones Meromorfas.

versión final 1.1, 30 de Junio del 2003

Definición 12.1 Se llama función meromorfa a una función holomorfa en todo el plano, salvo polos. Los polos no se pueden acumular en el plano.

Ejemplo Las funciones racionales $\frac{p(z)}{q(z)}$ con $p(z)$ y $q(z)$ polinomios

$$\frac{p(z)}{q(z)} = P(z) + \frac{r(z)}{q(z)}, \quad \text{gr}(r) < \text{gr}(q).$$

Nos interesa el último término solamente. Los lugares nulos de $q(z)$: z_1, z_2, \dots, z_k (distintos) son los polos de $\frac{r}{q}$. La correspondiente descomposición en fracciones parciales

$$\begin{aligned} \frac{r(z)}{q(z)} &= \frac{c_{11}}{z - z_1} + \frac{c_{12}}{(z - z_1)^2} + \frac{c_{13}}{(z - z_1)^3} + \dots + \frac{c_{1m_1}}{(z - z_1)^{m_1}} + \\ &+ \frac{c_{21}}{z - z_2} + \frac{c_{22}}{(z - z_2)^2} + \dots + \frac{c_{2m_2}}{(z - z_2)^{m_2}} + \\ &+ \dots + \\ &+ \frac{c_{k1}}{z - z_k} + \frac{c_{k2}}{(z - z_k)^2} + \dots + \frac{c_{1m_k}}{(z - z_k)^{m_k}}. \end{aligned}$$

Ejemplo La función

$$\cot z = \frac{1 - \frac{z^2}{2!} + \dots}{z - \frac{z^3}{3!} + \dots} = \frac{1}{z} (1 + \text{potencias crecientes de } z).$$

El Res $\cot z = 1$, lo que significa que la parte principal en $z_0 = 0$ es $\frac{1}{z}$.

Sabemos, además, que $\sin z = 0$ sólo si $z = k\pi$, para $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Las respectivas partes principales son $\frac{1}{z}, \frac{1}{z \pm \pi}, \frac{1}{z \pm 2\pi}, \dots$. Si sumamos las partes principales en $\pm k\pi$ tenemos

$$\frac{1}{z - k\pi} + \frac{1}{z + k\pi} = \frac{2z}{z^2 - k^2\pi^2}.$$

La idea es reconstruir la función a partir de las partes principales

$$\cot z \stackrel{?}{=} \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - k^2\pi^2} + \underbrace{\varphi(z)}_{\text{función entera}} . \quad (12.1)$$

Utilizaremos análisis de Fourier para validar la expresión (12.1). Consideremos la función $\cos xt$ con $x \in \mathbb{R}$ pero $x \neq 0, \neq \pm 1, \neq \pm 2, \dots$

$$\cos xt = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu} \cos \nu t ,$$

donde los coeficientes de Fourier vienen dados por

$$a_{\nu} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos xt \cos \nu t dt .$$

Calculemos los coeficientes

$$\begin{aligned} a_{\nu} &= \frac{2}{\pi} \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (\cos(x + \nu)t + \cos(x - \nu)t) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{\text{sen}(x + \nu)\pi}{x + \nu} + \frac{\text{sen}(x - \nu)\pi}{x - \nu} \right\} \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{(-1)^{\nu} \text{sen } x\pi}{x + \nu} + \frac{(-1)^{\nu} \text{sen } x\pi}{x - \nu} \right\} \\ &= (-1)^{\nu} \frac{2x \text{sen } x\pi}{\pi(x^2 - \nu^2)} . \end{aligned}$$

Evaluamos en $t = \pi$, tenemos $\cos \nu t = \cos \nu\pi = (-1)^{\nu}$. Luego

$$\cos x\pi = \frac{\text{sen } x\pi}{\pi} \left\{ \frac{1}{x} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 - \nu^2} \right\} .$$

Hacemos una prolongación analítica:

$$\pi \frac{\cos z\pi}{\text{sen } z\pi} = \pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - \nu^2} + \underbrace{0}_{\text{función entera}} .$$

La convergencia de la serie está garantizada por el desarrollo:

- Convergencia ordinaria en z_0 :

$$\frac{1}{z_0^2 - \nu^2} ,$$

converge porque es esencialmente $\sum \frac{1}{\nu^2}$.

- Dentro del círculo $|z| \leq R$ hay una cantidad finita de polos. Tomemos en cuenta en la serie sólo los índices suficientemente grandes $\nu > 2R$.

$$|z^2 - \nu^2| \geq \nu^2 - |z|^2 \geq \nu^2 - R^2 > \nu^2 - \frac{\nu^2}{4} = \frac{3}{4}\nu^2.$$

Por lo tanto, los términos de la serie:

$$\left| \frac{1}{z^2 - \nu^2} \right| \leq \frac{4}{3\nu^2},$$

tiene como mayorante convergente $\sum \frac{1}{\nu^2}$.

A partir de lo anterior podemos encontrar un desarrollo para $\text{sen } z/z$ como producto infinito, sabemos que

$$\frac{d}{dz} \log z = \frac{1}{z}$$

luego

$$\frac{d}{dz} \log \text{sen } \pi z = \frac{\pi \cos \pi z}{\text{sen } \pi z} = \pi \cot \pi z,$$

y

$$\frac{d}{dz} \log \left(\frac{\nu^2 - z^2}{\nu^2} \right) = \frac{\nu^2}{\nu^2 - z^2} = \frac{-2z}{\nu^2} = \frac{2z}{z^2 - \nu^2}.$$

Combinando

$$\pi \cot \pi z = \frac{d}{dz} \log \text{sen } \pi z = \frac{d}{dz} \log z + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{d}{dz} \log \left(\frac{\nu^2 - z^2}{\nu^2} \right),$$

integrando

$$\log \text{sen } \pi z = C + \log z + \sum_{\nu=1}^{\infty} \log \left(\frac{\nu^2 - z^2}{\nu^2} \right),$$

exponenciando

$$\text{sen } \pi z = e^c z \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\nu^2} \right).$$

dividamos por z a ambos lados

$$\frac{\text{sen } \pi z}{z} = e^c \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\nu^2} \right)$$

y tomemos el límite $z \rightarrow 0$

$$\pi = e^c,$$

luego

$$\boxed{\frac{\text{sen } \pi z}{\pi z} = \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\nu^2} \right)}.$$

Teorema 12.1 Mittag-Leffler

Se pueden prescribir polos en z_1, z_2, \dots , en cantidad infinita sólo sometidos a la condición de que no se acumulen en el plano.

En cada uno se puede prescribir una parte principal

$$p_j(z) = \frac{c_{j,1}}{z - z_j} + \frac{c_{j,2}}{(z - z_j)^2} + \dots + \frac{c_{j,m_j}}{(z - z_j)^{m_j}} .$$

Entonces es posible construir una función meromorfa que tiene exactamente estas singularidades en el plano. Su representación puede darse en forma de una descomposición en fracciones parciales. La función meromorfa más general con dichas particularidades se obtiene sumando cualquier función entera.

Ejemplo

Consideremos una red $\{m\omega_1 + n\omega_2\}$, con $m, n \in \mathbb{Z}$

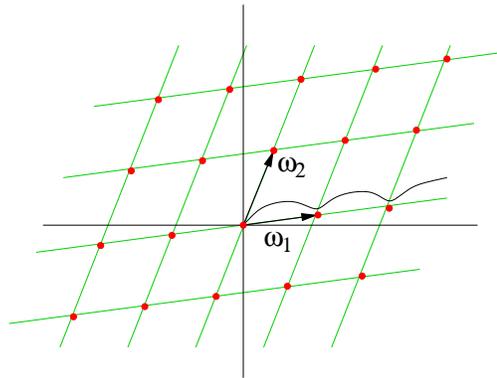


Figura 12.1: Malla.

prescribir

$$p_j(z) = \frac{1}{(z - z_j)^2} ,$$

polos de segundo orden, en particular $p_0(z) = \frac{1}{z^2}$. Escribamos un intento de la función

$$f(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(z - z_j)^2} - \frac{1}{z_j^2} \right) ,$$

se puede demostrar que esta serie converge. Reemplacemos la malla

$$f(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{0 \neq m, n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{1}{(z - m\omega_1 - n\omega_2)^2} - \frac{1}{(m\omega_1 + n\omega_2)^2} \right) ,$$

derivemos

$$\begin{aligned} f'(z) &= -2 \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{1}{(z - (m-1)\omega_1 - n\omega_2)^3} \right) \\ &= -2 \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{1}{((z + \omega_1) - m\omega_1 - n\omega_2)^3} \right) \equiv f'(z + \omega_1) . \end{aligned}$$

Esto muestra que ω_1 es período de f' y de la misma manera podemos probar que ω_2 también es período de f' . Luego, existen funciones doblemente periódicas. Integrando la relación anterior

$$f(z) = f(z + \omega_1) + C .$$

Si $0 \neq m, n \in \mathbb{Z}$ entonces $0 \neq -m, -n \in \mathbb{Z}$, luego

$$f(z) = \frac{1}{(-z)^2} + \sum_{0 \neq m, n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{1}{(-z + m\omega_1 + n\omega_2)^2} - \frac{1}{(m\omega_1 + n\omega_2)^2} \right) = f(-z) ,$$

por lo tanto, $f(z)$ es una función par. Evaluando en $z = -\frac{\omega_1}{2}$ tenemos

$$f\left(\frac{\omega_1}{2}\right) - f\left(-\frac{\omega_1}{2}\right) = 0 = -C .$$

Luego ω_1, ω_2 son también períodos de f . Una función periódica dada sugiere definir:

Definición 12.2 *Malla primitiva es un par de períodos η_1, η_2 tal que, todo período de la función es combinación lineal de η_1 y η_2 con coeficientes en \mathbb{Z} .*

Sea el par de períodos ω_1 y ω_2 la malla primitiva. Entonces cualquier otro par

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} ,$$

y

$$\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{n_{22}}{\Delta} & \frac{-n_{12}}{\Delta} \\ \frac{-n_{21}}{\Delta} & \frac{n_{11}}{\Delta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} ,$$

donde $n_{11}n_{22} - n_{12}n_{21} = \Delta \neq 0$. La condición necesaria y suficiente es que todos los η_{ij} sean divisibles por Δ , lo cual implica $\frac{n_{11}n_{22}}{\Delta^2} - \frac{n_{12}n_{21}}{\Delta^2} = \frac{1}{\Delta} \in \mathbb{Z}$ esto es cierto si y sólo si $\Delta = \pm 1$.

Teorema 12.2 Toda función entera doblemente periódica, es necesariamente constante.

Demostración

$$|f(z)| < K ,$$

en todo el plano, luego la función es constante.

q.e.d.

Capítulo 13

La función Γ .

versión final 1.2, 1 de Julio del 2003

13.1. Definición.

El factorial definido por

$$\begin{aligned}n! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \\(n+1)! &= (n+1)n!\end{aligned}$$

Definición 13.1 Definamos la función Γ

$$\Gamma(n+1) = n! = n(n-1)! = \Gamma(n)n, \quad (13.1)$$

para $n = 0, 1, 2, 3, \dots$.

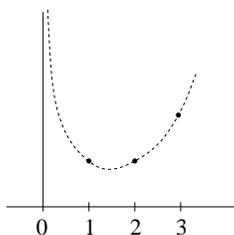


Figura 13.1: Valores de la función Γ .

Nuestras exigencias serán

- i) $\Gamma(z)$ holomorfa, en lo posible.
- ii) $\Gamma(z+1) = \Gamma(z) \cdot z$, identidad funcional.
- iii) $\Gamma(1) = 1$.

13.2. Exploración.

Supongamos que existe tal $\Gamma(z)$, entonces

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z}\Gamma(z+1) = \frac{1}{z}(1 + \text{potencias crecientes de } z)$$

Proposición 13.1 La función $\Gamma(z)$ tiene polos simples en $0, -1, -2, \dots, -n, \dots$, con residuos en $z = -n$, $\frac{(-1)^n}{n!}$.

Demostración Es cierto para $n = 0$. Por hipótesis inductiva, lo suponemos válido para $n = k$, polo en $z = -k$ y probamos para $k + 1$, es decir, polo $z = -(k + 1)$. Por hipótesis,

$$\Gamma(z) = \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{z+k} + a_0 + a_1(z+k) + \dots,$$

construimos

$$\begin{aligned} \frac{1}{z}\Gamma(z+1) &= \left(-\frac{1}{k+1} + \text{potencias crecientes de } (z+k+1) \right) \\ &\times \left(\frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{z+k+1} + a_0 + a_1(z+k+1) + \dots \right), \end{aligned}$$

usando la identidad funcional

$$\frac{1}{z}\Gamma(z+1) = \Gamma(z) = \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!} \frac{1}{z+k+1} + \text{potencias crecientes de } (z+k+1).$$

Luego la demostración por inducción está completa.

q.e.d.

Consideremos

$$\log \Gamma(z+1) = \log z + \log \Gamma(z),$$

derivando

$$\frac{\Gamma'(z+1)}{\Gamma(z+1)} = \frac{1}{z} + \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}.$$

Definamos $g(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z)$, luego

$$\begin{aligned} g(z) &= -\frac{1}{z} + g(z+1) \\ g(z+1) &= -\frac{1}{z+1} + g(z+2), \end{aligned}$$

combinándolas

$$g(z) = -\frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} + g(z+2),$$

derivando

$$g'(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{(z+1)^2} + g'(z+2),$$

iterando una vez más

$$g'(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{(z+1)^2} + \frac{1}{(z+2)^2} + g'(z+3).$$

13.3. Definiciones precisas.

Consideremos la expansión infinita

$$g'(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{(z+\nu)^2}.$$

Converge en el círculo $|z| < R$. Integremos $g'(z)$ término a término

$$g(z) = -\frac{1}{z} - C + \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_o^z \frac{d\xi}{(\xi+\nu)^2},$$

por un camino tal que evita los polos

$$\int_o^z \frac{d\xi}{(\xi+\nu)^2} = \left[-\frac{1}{\xi+\nu} \right]_o^z = \left(-\frac{1}{z+\nu} + \frac{1}{\nu} \right).$$

Recordando la definición

$$\frac{d}{dz} \log \Gamma(z) = g(z) = -\frac{1}{z} - C - \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z+\nu} - \frac{1}{\nu} \right),$$

integrando

$$\log \Gamma(z) = C_1 - \log z - Cz - \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\log(z+\nu) - \log(\nu) - \frac{z}{\nu} \right),$$

ya que la integral

$$\int_o^z \left(\frac{1}{\xi+\nu} - \frac{1}{\nu} \right) d\xi = \left[\log(\xi+\nu) - \frac{\xi}{\nu} \right]_o^z,$$

exponenciando

$$\Gamma(z) = K \frac{1}{z} e^{-Cz} \prod_{\nu=1}^{\infty} e^{\frac{z}{\nu}} \left(1 + \frac{z}{\nu} \right)^{-1},$$

donde $K = e^{C_1}$. Tomamos el cociente de las funciones Γ ,

$$\frac{\Gamma(z+1)}{\Gamma(z)} = z = \frac{z}{z+1} \frac{e^{Cz}}{e^{C(z+1)}} \prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{z+1}{\nu}} \frac{\nu+z}{\nu}}{e^{\frac{z}{\nu}} \frac{\nu+z+1}{\nu}},$$

luego despejando la constante que queremos determinar

$$\begin{aligned} e^C &= \frac{1}{z+1} \prod_{\nu=1}^{\infty} e^{\frac{1}{\nu}} \frac{\nu+z}{\nu+z+1} \\ &= \frac{1}{z+1} \lim_{n \rightarrow \infty} e^1 e^{1/2} e^{1/3} \dots e^{1/n} \cdot \frac{(z+1)(z+2) \dots (z+n)}{(z+2)(z+3) \dots (z+1+n)} \cdot \frac{z+1+n}{n+1} \end{aligned}$$

haciendo las simplificaciones y sacando logaritmo

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log(n+1) \right)$$

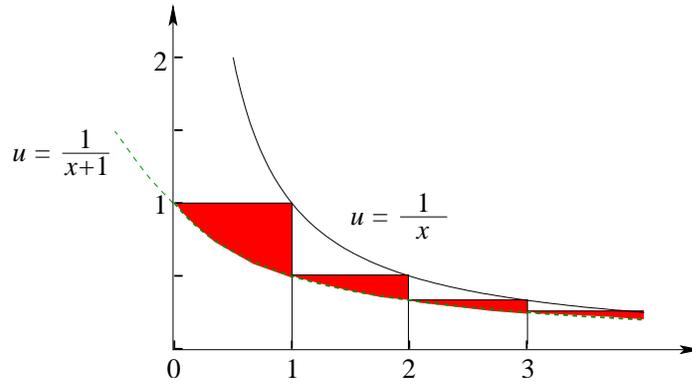


Figura 13.2: Acotando el límite.

Los segmentos rojos (oscuros) son un área finita:

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1+x} \right) dx = [\log x - \log(1+x)]_0^{\infty} = \log \frac{x}{x+1} \Big|_1^{\infty} = \log 2 .$$

podemos acotar el límite que nos interesa

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log(n+1) \right) < \log 2$$

este límite existe y es conocido como la constante de Euler-Mascheroni, $\gamma \approx 0.577$.

Determinemos la otra constante, para ello formemos

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(z)}{K} &= \frac{1}{z} \lim_{n \rightarrow \infty} \exp \left(-\frac{z}{1} - \frac{z}{2} - \cdots - \frac{z}{n} + z \log n \right) \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{\nu=1}^n e^{\frac{z}{\nu}} \frac{\nu}{\nu+z} \\ &= \frac{1}{z} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^z n!}{(z+1) \cdots (z+n)} . \end{aligned}$$

Evaluando en $z = 1$

$$\frac{\Gamma(1)}{K} = 1 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n n!}{2 \times 3 \cdots (1+n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1 ,$$

luego $K = 1$. Determinadas las constantes podemos escribir expresiones para la función Γ :

$$\boxed{\begin{aligned} \Gamma(z) &= \frac{1}{z} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^z n!}{(z+1)(z+2) \cdots (z+n)} \\ \Gamma(z) &= \frac{e^{-\gamma z}}{z} \prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{e^{z/\nu}}{1 + \frac{z}{\nu}} \end{aligned}} \quad (13.2)$$

Ambas expresiones son debidas a Gauss. La función Γ es meromorfa tiene polos simples en $z = 0, -1, -2, -3, \dots$

Formemos el inverso de un producto de funciones Γ

$$\frac{1}{\Gamma(z) \cdot \Gamma(-z)} = z \cdot (-z) \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{\nu}\right) \left(1 - \frac{z}{\nu}\right) = -z^2 \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\nu^2}\right),$$

pero $-z\Gamma(-z) = \Gamma(1-z)$ luego

$$\boxed{\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(1-z)} = \frac{1}{\pi} \operatorname{sen} \pi z} \quad (13.3)$$

Evaluemos (13.3) para $z = \frac{1}{2}$, tenemos

$$\frac{1}{[\Gamma(1/2)]^2} = \frac{1}{\pi},$$

luego

$$\boxed{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}} \quad (13.4)$$

A partir de este valor podemos evaluar

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) &= \Gamma\left(\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \\ \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) &= \Gamma\left(\frac{3}{2} + 1\right) = \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

La expresión general

$$\boxed{\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right) = \frac{2n-1}{2} \dots \frac{3}{2} \frac{1}{2} \sqrt{\pi} = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \sqrt{\pi}} \quad (13.5)$$

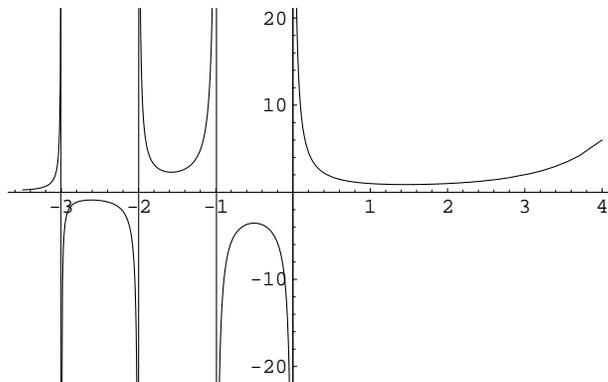


Figura 13.3: La función Γ .

Si $z = \frac{2n+1}{2}$ entonces $1-z = -\frac{2n-1}{2}$ luego

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{2n-1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \sqrt{\pi} \Gamma(1-z) = \frac{\text{sen}\left[(2n+1)\frac{\pi}{2}\right]}{\pi},$$

donde hemos usado (13.3). Despejando la relación anterior para $\Gamma(1-z)$ tenemos

$$\Gamma(1-z) = \Gamma\left(-\frac{2n-1}{2}\right) = \frac{2^n \pi}{(2n-1)!! \sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\text{sen}\left[(2n+1)\frac{\pi}{2}\right]} = \frac{(-2)^n}{(2n-1)!!} \sqrt{\pi} \quad (13.6)$$

Para $n=1$ tenemos $\Gamma(-1/2) = -2\sqrt{\pi}$, para $n=2$ tenemos $\Gamma(-3/2) = 4\sqrt{\pi}/3$.

Sea $z = \frac{1}{2}$ luego

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} n!}{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdots \frac{2n+1}{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)} \frac{2^{n+1}}{2n+1} \sqrt{n}.$$

Elevando al cuadrado, tomando el recíproco y multiplicando por dos, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdots (2n-1)(2n-1)}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \frac{2n+1}{2n} \frac{1}{2} \frac{2n+1}{2n} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \left(1 - \frac{1}{6^2}\right) \cdots = \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{(2\nu)^2}\right). \end{aligned}$$

Este último resultado es conocido como el producto de Wallis.

$$\prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{(2\nu)^2}\right) = \frac{2}{\pi} \quad (13.7)$$

13.4. Representaciones integrales de Γ .

Consideremos t^z , con $t > 0$, valor principal de $e^{z \text{Log } t}$. Derivemos respecto a t

$$\frac{\partial}{\partial t} t^z = \frac{z}{t} e^{z \text{Log } t} = z e^{-\text{Log } t} e^{z \text{Log } t} = z e^{(z-1) \text{Log } t} = z t^{z-1}.$$

Consideremos la integral siguiente

$$\int_0^1 t^{z+\nu-1} dt = \left. \frac{t^{z+\nu}}{z+\nu} \right|_0^1 = \frac{1}{z+\nu} e^{(z+\nu) \text{Log } t} \Big|_0^1 = \frac{1}{z+\nu} \underbrace{e^{(x+\nu) \text{Log } t}}_{\text{premisa } x > 0 \text{ módulo } = 1} \underbrace{e^{iy \text{Log } t}}_{= 1} \Big|_0^1 = \frac{1}{z+\nu}.$$

Las partes principales de $\Gamma(z)$ son: $\frac{(-1)^\nu}{\nu!} \frac{1}{z+\nu}$ con $\nu = 0, 1, 2, 3, \dots$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu!} \frac{1}{z+\nu} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu!} \int_0^1 t^\nu t^{z-1} dt = \int_0^1 \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-t)^\nu}{\nu!} \nu t^{z-1} dt.$$

Luego

$$\Gamma(z) = \int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt + \text{función entera.}$$

Afirmación: La función entera es $\int_1^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$.

Afirmación:

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt .$$

Relación con $\Gamma(x)$. Hagamos el cambio de variable $\tau = t/n$ y $dt = n d\tau$

$$I = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt = \int_{\tau=0}^1 \underbrace{\left(1 - \tau\right)^n}_u \underbrace{\tau^{x-1}}_{v'} n^{x-1} n d\tau ,$$

integrando por partes

$$I = n^x \left\{ \left[\left(1 - \tau\right)^n \frac{\tau^x}{x} \right]_0^1 + \frac{n}{x} \int_{\tau=0}^1 \underbrace{\left(1 - \tau\right)^{n-1}}_u \underbrace{\tau^x}_{v'} d\tau \right\} .$$

Nuevamente integrando por partes

$$I = n^x \frac{n}{x} \left\{ \left[\left(1 - \tau\right)^{n-1} \frac{\tau^{x+1}}{x+1} \right]_0^1 + \frac{n-1}{x+1} \int_{\tau=0}^1 \left(1 - \tau\right)^{n-2} \tau^{x+1} d\tau \right\} .$$

Se ve una clara ley de formación, después de integrar n veces por partes:

$$I = n^x \frac{n(n-1)\cdots 1}{x(x+1)\cdots(x+n-1)} \left[\frac{\tau^{x+n}}{x+n} \right]_0^1 = \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Gamma(x) .$$

Obtuvimos pues

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt = \Gamma(x) , \quad \text{para } x > 0. \quad (13.8)$$

Haciendo una prolongación analítica al plano complejo

$$\boxed{\int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt = \Gamma(z)} \quad (13.9)$$

para $\text{Re}[z] > 0$.

Hagamos una observación

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} = \int_0^\infty e^{-t} t^{-1/2} dt = \int_0^\infty e^{-\tau^2} d\tau .$$

13.5. La función Beta.

Estudiemos el producto de dos funciones Γ ,

$$\begin{aligned}\Gamma(z) \cdot \Gamma(s) &= \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \int_0^\infty e^{-u} u^{s-1} du, \quad \text{para } \operatorname{Re}[z] > 0 \text{ y } \operatorname{Re}[s] > 0 \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(t+u)} t^{z-1} u^{s-1} dt du.\end{aligned}$$

Hagamos el cambio de variable $t = t$ y $u = v - t$, el Jacobiano de la transformación

$$\frac{\partial(t, u)}{\partial(t, v)} = \begin{vmatrix} +1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0.$$

Escribiendo la integral en las nuevas variables

$$\Gamma(z) \cdot \Gamma(s) = \int_{v=0}^\infty e^{-v} \left\{ \int_{t=0}^v t^{z-1} (v-t)^{s-1} dt \right\} dv,$$

ahora hacemos el cambio de variable $\tau = t/v$ y la integral se transforma

$$\Gamma(z) \cdot \Gamma(s) = \int_{v=0}^\infty e^{-v} \left\{ \int_{\tau=0}^1 \tau^{z-1} v^{z-1} v^{s-1} (1-\tau)^{s-1} v d\tau \right\} dv.$$

Luego

$$\Gamma(z) \cdot \Gamma(s) = \underbrace{\int_{v=0}^\infty e^{-v} v^{z+s-1} dv}_{\Gamma(z+s)} \int_{\tau=0}^1 \tau^{z-1} (1-\tau)^{s-1} d\tau.$$

Definición 13.2 Definimos la función $B(z, s)$ a partir de

$$B(z, s) = B(s, z) = \frac{\Gamma(z) \cdot \Gamma(s)}{\Gamma(z+s)} = \int_0^1 \tau^{z-1} (1-\tau)^{s-1} d\tau \quad (13.10)$$

para $\operatorname{Re}[z] > 0$ y $\operatorname{Re}[s] > 0$.

13.5.1. Casos particulares.

i) Sea $s = 1 - z$ luego $\Gamma(z + s) = \Gamma(1) = 1$, lo que implica

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \int_0^1 \frac{\tau^{z-1}}{(1-\tau)^z} d\tau = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi z}, \quad \operatorname{Re}[z] > 0.$$

Luego

$$B(z, 1-z) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi z} \quad (13.11)$$

ii) Sea $s = n + 1$, para $\operatorname{Re}[z] > 0$

$$\int_0^1 \tau^{z-1} (1-\tau)^n d\tau = \frac{n!}{z(z+1)\cdots(z+n)} = B(z, n+1),$$

lo que implica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^z B(z, n+1) = \Gamma(z). \quad (13.12)$$

iii) Sea $z = \frac{1}{2}$ y $s = \frac{n+1}{2}$, luego

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{n+1}{2}\right) = \int_0^1 \frac{\sqrt{(1-\tau)^{n-1}}}{\sqrt{\tau}} d\tau,$$

Sea $\tau = \sin^2 \varphi$ con $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, luego $d\tau = 2 \sin \varphi \cos \varphi d\varphi$ y $\sqrt{1-\tau} = \cos \varphi$, haciendo este cambio de variable

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{n+1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)} = 2 \int_0^{\pi/2} \cos^n \varphi d\varphi.$$

Capítulo 14

Representación Conforme.

versión final 1.2, 11 de Julio del 2003

14.1. Introducción.

Consideremos la transformación o mapeo $w = f(z)$

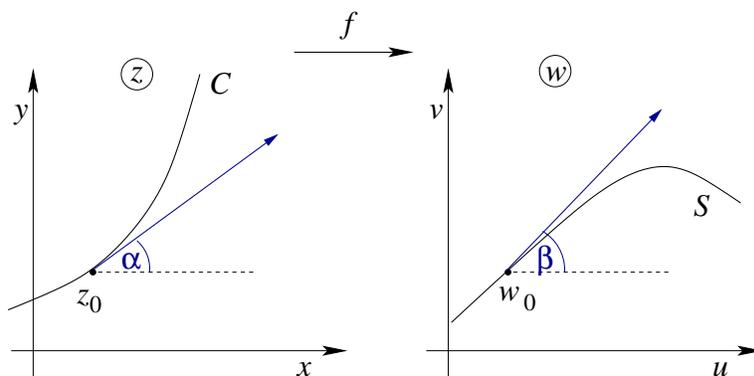


Figura 14.1: Transformación $w = f(z)$.

Consideremos la curva C en el plano z . Sea f analítica en z_0 y tal que $f'(z_0) \neq 0$. Sea S la curva correspondiente al mapeo de la curva C , $f(z_0) = w_0$.

Si α es el ángulo de la tangente en z_0 y si β es el ángulo de la tangente en w_0 entonces

$$\beta = \alpha + \psi_0, \quad (14.1)$$

donde $\psi_0 = \text{Ang } f'(z_0)$. Es decir, las tangentes rotan en un ángulo ψ_0 fijo siempre que f sea analítica en z_0 y $f'(z_0) \neq 0$.

14.2. Representación conforme.

Puesto que el ángulo ψ_0 está determinado por la función f en el punto z_0 , es el mismo para toda curva que pase por z_0 .

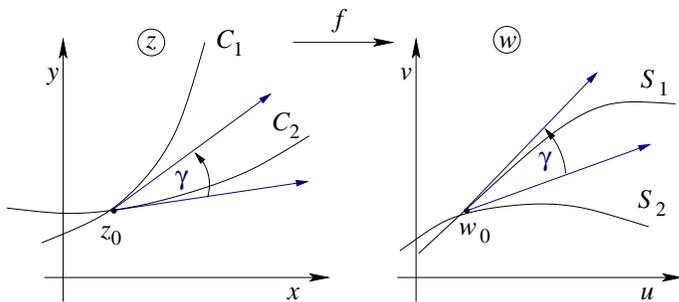


Figura 14.2: Par de curvas bajo la transformación $w = f(z)$.

Veamos lo qué pasa con el ángulo entre las curvas en el plano z y en el plano w ,

$$\left. \begin{aligned} \beta_1 &= \alpha_1 + \psi_0 \\ \beta_2 &= \alpha_2 + \psi_0 \end{aligned} \right\} \implies \beta_1 - \beta_2 = \alpha_1 - \alpha_2 = \gamma .$$

En tal caso la representación es *conforme*.

Teorema 14.1 En cada punto de un dominio donde f es analítica y $f'(z) \neq 0$, el mapeo $w = f(z)$ es conforme, *i.e.* preserva los ángulos orientados.

Notemos que

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{|\Delta w|}{|\Delta z|} = |f'(z_0)| ,$$

es decir, la transformación magnifica la longitud de trazos cortos que pasan por z_0 en un factor de $|f'(z_0)|$.

Definición 14.1 Un punto donde $f'(z_0) = 0$ se llama un **punto crítico** de la transformación.

Por ejemplo, el punto $z_0 = 0$ es un punto crítico de la transformación $w = z^2 + 1$. Usemos una forma polar para $z = re^{i\theta}$ y $w - 1 = \rho e^{i\phi}$, entonces $\rho e^{i\phi} = r^2 e^{2i\theta}$, luego un rayo que salga con un ángulo c desde $z = 0$ se mapeará en un rayo que sale con un ángulo $2c$ desde el punto $w = 1$.

Definición 14.2 Un mapeo **isogonal** es aquel que preserva el ángulo pero no su orientación.

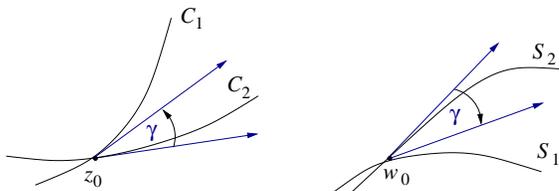


Figura 14.3: Mapeo isogonal.

Por ejemplo, $w = z^*$ es un reflexión sobre el eje real y es isogonal.

Ejemplo Toda transformación conforme debe mapear curvas ortogonales sobre curvas ortogonales.

Ejemplo Consideremos la transformación $w = z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$

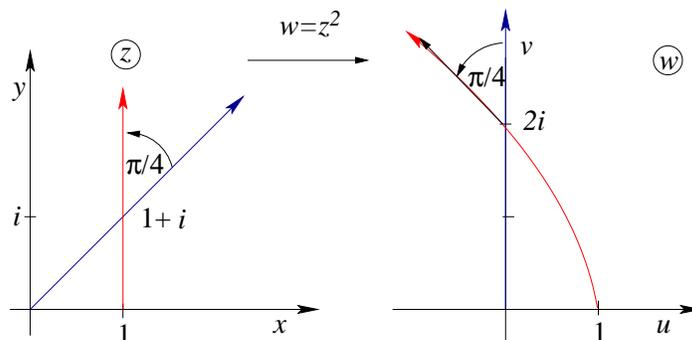


Figura 14.4: Mapeo $w = z^2$.

En el plano w tenemos una parábola

$$\left. \begin{array}{l} u = 1 - y^2 \\ v = 2y \end{array} \right\} \text{ parámetro } y, (x = 1),$$

o bien, $v^2 = -4(u - 1)$.

Si la dirección de y creciente se toma como el sentido positivo de las dos líneas en z entonces el ángulo entre ellas es $\pi/4$.

Veamos qué pasa en el plano w : cuando $y > 0$ e y crece a lo largo de la línea $y = x$, entonces v crece a lo largo de la línea $u = 0$, puesto que $v = 2y^2$, y por lo tanto el sentido positivo de la imagen de la línea $x = y$ es hacia v creciente. Para la parábola vemos que v también crece cuando $y > 0$, crece ya que $v = 2y$, y por lo tanto el sentido es el indicado en la figura 14.4.

Es claro que el ángulo entre las curvas en z es igual a $\pi/4$, es decir, toda curva que pase por $1 + i$ rota en $\pi/4$ frente a la transformación $w = z^2$.

El coeficiente de magnificación es $|f'(1 + i)| = 2|1 + i| = 2\sqrt{2}$.

14.3. Transformaciones de funciones armónicas.

Un problema viejo y prominente: encontrar una función que sea armónica en un dominio dado y que satisfaga condiciones dadas (prescritas) en el borde del dominio.

- Problema de condiciones de borde de primera clase o problema de Dirichlet: prescripción de los valores de la función sobre el borde.
- Problema de condiciones de borde de segunda clase o problema de Neumann: prescripción de los valores de la derivada normal de la función.

- Existen modificaciones y combinaciones de los dos problemas anteriores.

Toda función analítica proporciona un par de funciones armónicas:

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y) ,$$

donde u y v satisfacen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 , \quad y \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 ,$$

la función u se llama la armónica conjugada de v y viceversa.

Ejemplo Consideremos la función

$$f(z) = e^{iz} = u(x, y) + iv(x, y) ,$$

las funciones u, v corresponden a

$$u(x, y) = e^{-y} \cos x , \quad v(x, y) = e^{-y} \operatorname{sen} x ,$$

las funciones u, v son armónicas en todo el plano.

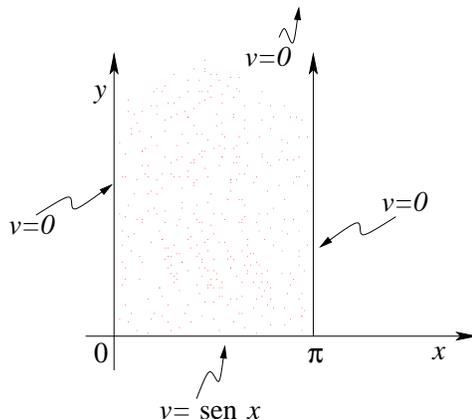


Figura 14.5: Condiciones de borde de primera clase (Dirichlet).

Condiciones de borde:

$$v(0, y) = 0 , \quad v(\pi, y) = 0 , \quad v(x, 0) = \operatorname{sen} x , \quad \lim_{y \rightarrow \infty} v(x, y) = 0 ,$$

y además $v(x, y)$ satisface:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 .$$

Este procedimiento necesita muchas veces ayuda adicional ya que no siempre es simple.

Consideremos una función $H(x, y)$ armónica. Sean u, v dos nuevas variables tales que $z = x + iy$ sea una función analítica de $w = u + iv$, es decir,

$$z = f(w) .$$

Sabemos que podemos encontrar una función $G(x, y)$ armónica conjugada de $H(x, y)$ y en tal caso $H + iG$ es una función analítica de z . Puesto que z es una función analítica de w se tiene que $H + iG$ es también una función analítica de w en tal caso

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial v^2} = 0 .$$

Establecemos entonces el siguiente teorema:

Teorema 14.2 Toda función armónica de x, y se transforma en una función armónica de u, v bajo el cambio de variable $x + iy = f(u + iv)$ donde f es una función analítica.

Consecuencia: una función que es armónica en una vecindad permanece armónica bajo el cambio de variable que proviene de la transformación

$$w = F(z) ,$$

donde F es analítica y $F'(z) \neq 0$ en la vecindad, puesto que la función inversa $z = f(w)$ es analítica.

Ilustración: La función $H(x, y) = e^{-y} \operatorname{sen} x$ es armónica en alguna región del plano z . Si transformamos $z = w^2$ tenemos

$$x = u^2 - v^2 , \quad y = 2uv ,$$

y por lo tanto la función

$$H(u, v) = e^{-2uv} \operatorname{sen}(u^2 - v^2) ,$$

es armónica en la región correspondiente del plano w

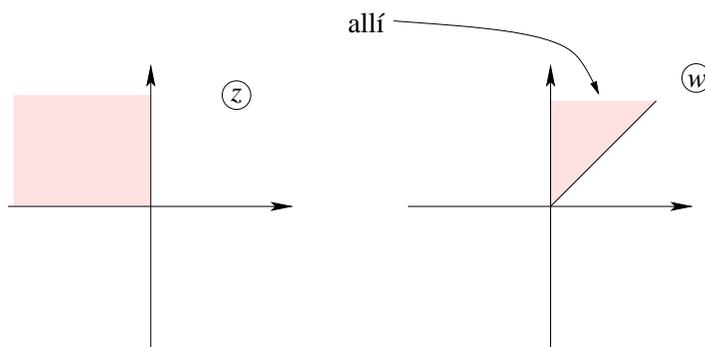


Figura 14.6: Región donde $H(u, v)$ es armónica.

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial v^2} = 0 .$$

14.4. Transformaciones de las condiciones de borde.

Condiciones típicas para H armónica: $H = \text{cte.}$ o $\frac{\partial H}{\partial n} = \text{cte.}$, etc. sobre porciones del borde de una región.

Algunas de estas condiciones permanecen inalteradas frente a una transformación conforme.

Definición 14.3 *Curvas de nivel son aquellas sobre las cuales $H(x, y) = \text{cte.}$*

Haciendo el cambio de variable: $x = x(u, v)$ e $y = y(u, v)$, si originalmente teníamos $H(x, y) = \text{cte.}$, ahora tenemos que $H[x(u, v), y(u, v)] = \text{cte.}$

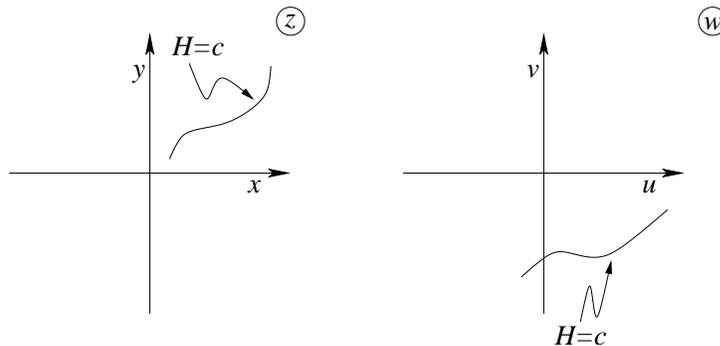


Figura 14.7: Mapeo de una condición de borde.

La condición se traslada al problema transformado.

Si la derivada normal de H se anula a lo largo de alguna curva en z entonces la derivada normal, expresada en términos de u y v , también se anula a lo largo de la curva correspondiente en w .

Ejemplo En z tenemos $\frac{\partial H}{\partial x} = 0$ implica que en w tenemos $\frac{\partial H}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} = 0$.

Veámoslo con $\frac{\partial H}{\partial n}$, la derivada normal. Para ello consideremos las siguientes propiedades del gradiente de una función $H(x, y)$.

- i) La dirección del vector gradiente de $H(x, y)$ es aquella en la cual esta función varía más rápido.
- ii) La magnitud del vector gradiente es el valor de aquella máxima variación.
- iii) La proyección del vector gradiente de H en una determinada dirección es la derivada direccional de la función H en tal dirección. En particular

$$\vec{\nabla} H \cdot \hat{x} = \frac{\partial H}{\partial x}, \quad \vec{\nabla} H \cdot \hat{y} = \frac{\partial H}{\partial y},$$

por lo tanto podemos escribir en z ,

$$\vec{\nabla} H = 1 \cdot \frac{\partial H}{\partial x} + i \frac{\partial H}{\partial y}.$$

iv) El gradiente es perpendicular a la curva de nivel $H = \text{cte.}$ en cada punto, en efecto $H(x, y) = \text{cte.}$ implica $dH = \frac{\partial H}{\partial x}dx + \frac{\partial H}{\partial y}dy = \vec{\nabla}H \cdot d\vec{r} = 0$ implica que $\vec{\nabla}H$ es perpendicular a las curvas de nivel.

Supongamos que la derivada normal de $H(x, y)$ es igual a cero sobre alguna curva C , es decir, $\frac{dH}{dn} = 0$ sobre C .

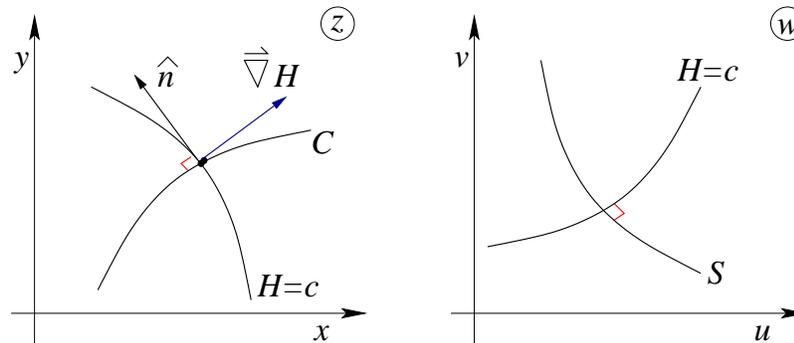


Figura 14.8: Curvas ortogonales.

Puesto que $\frac{dH}{dn}$ es la proyección de $\vec{\nabla}H$ sobre la normal, la normal sobre C debe ser perpendicular a $\vec{\nabla}H$ sobre todo punto de la curva. Por lo tanto, la tangente a C coincide con el gradiente y usando la ultima propiedad enumerada del gradiente C es ortogonal a las curvas de nivel $H(x, y) = c$. La imagen S de C es, bajo transformación conforme, ortogonal a las curvas de nivel

$$H[x(u, v), y(u, v)] = c ,$$

que son las imágenes de $H(x, y) = c$. Por lo tanto, la derivada normal de H en w , sobre la curva S , debe ser igual a cero.

De todo lo anterior podemos formular el siguiente teorema:

Teorema 14.3 Bajo una transformación $z = f(w)$, donde f es analítica y $f'(w) \neq 0$, las condiciones de borde de los tipos $H = c$ ó $\frac{dH}{dn} = 0$, sobre una función armónica H , donde $c = \text{cte.}$ permanecen inalteradas.

Ejemplo Consideremos la función armónica

$$H = 2 - x + \frac{x}{x^2 + y^2}$$

La transformación $z = e^w$ implica $x + iy = e^{u+iv} = e^u e^{iv}$ es decir

$$\left. \begin{array}{l} x = e^u \cos v \\ y = e^u \sin v \end{array} \right\} \implies x^2 + y^2 = e^{2u} ,$$

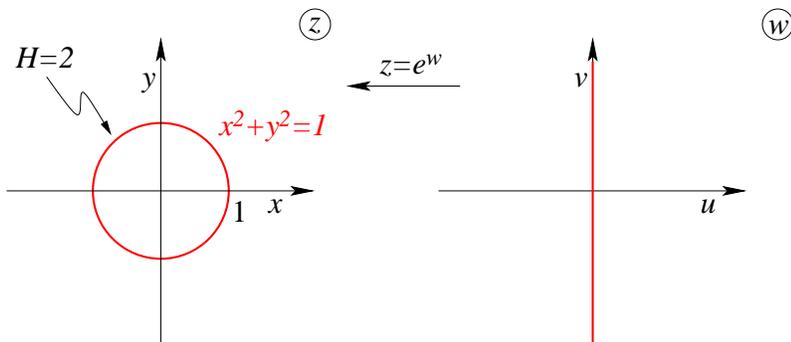


Figura 14.9: Mapeo de una particular condición de borde.

luego

$$H = 2 - e^u \cos v + \frac{e^u \cos v}{e^{2u}} = 2 - e^u \cos v + e^{-u} \cos v ,$$

para la imagen de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$, que corresponde a la recta $u = 0$, se tiene

$$H = 2 - \cos v + \cos v = 2 .$$

Vemos que la condición $H = 2$ sobre el contorno $x^2 + y^2 = 1$ se mantiene sobre su imagen $u = 0$ en el plano w .

14.5. Aplicaciones de la representación conforme.

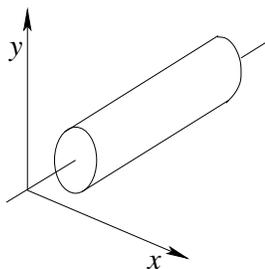


Figura 14.10: Geometría del sólido.

Sólido con conductividad térmica κ . Flujo estacionario de calor, la Temperatura en el interior del sólido, $T = T(x, y)$, satisface

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 . \tag{14.2}$$

Es decir, T es una función armónica de x, y en el dominio definido por el interior del sólido.

Definición 14.4 Las curvas **isotérmicas** satisface $T(x, y) = c$, con c una constante. Estas son las curvas de nivel de la función T . Claramente $\vec{\nabla}T$ es perpendicular a la isotérmica.

Si $S(x, y)$ es la función armónica conjugada de $T(x, y)$, entonces las curvas $S(x, y) = c$ tiene a los vectores gradientes como sus tangentes, estas curvas son las líneas de flujo.

$$F(x, y) = T(x, y) + iS(x, y) \tag{14.3}$$

Tal que $\text{Re}[F] = \text{cte.}$ corresponden a las isotérmicas y $\text{Im}[F] = \text{cte.}$ corresponden a las líneas de flujo de calor.

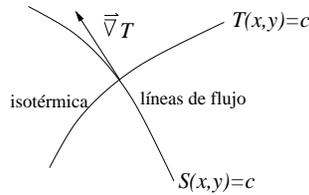


Figura 14.11: Curvas ortogonales.

14.5.1. Temperaturas estacionarias en una pared semi-infinita.

Debemos determinar $T(x, y)$ con las condiciones de borde dada en la figura 14.12. La función $T(x, y)$ está acotada en toda esta región, en particular para $y \rightarrow \infty$.

El problema matemático a resolver es el siguiente:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0, \quad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, y > 0\right).$$

Con las condiciones de borde

$$T\left(-\frac{\pi}{2}, y\right) = T\left(\frac{\pi}{2}, y\right) = 0, \quad y > 0,$$

$$T(x, 0) = 1, \quad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, y > 0\right),$$

$$|T(x, y)| < M, \text{ con } M = \text{cte.}$$

Tal que $T \rightarrow 0$ cuando $y \rightarrow \infty$.

Estamos frente a un problema de Dirichlet para un franja semi-infinita. Las condiciones son del tipo $T = c$, invariantes frente a transformaciones conformes. Es difícil descubrir una función analítica cuya parte real o imaginaria satisfaga las condiciones de borde señaladas arriba. Realizaremos entonces una transformación conforme para obtener una región y un problema suficientemente simple de modo que la función buscada resulte evidente.

Consideremos la transformación $z' = \text{sen}(z) = \text{sen } x \cosh y + i \cos x \sinh y$

Ahora usando la transformación

$$w = \text{Log} \frac{z' - 1}{z' + 1} = \text{Log} \frac{r_1}{r_2} + i(\theta_1 - \theta_2), \quad 0 < \theta_1 < \pi, 0 < \theta_2 < \pi. \quad (14.4)$$

Una función armónica de u, v que es igual a cero para $v = 0$, igual a uno para $v = \pi$ y acotada en la franja es claramente,

$$T = \frac{1}{\pi} v, \quad (14.5)$$

ya que corresponde a la parte imaginaria de la función analítica $f(w) = \frac{w}{\pi}$.

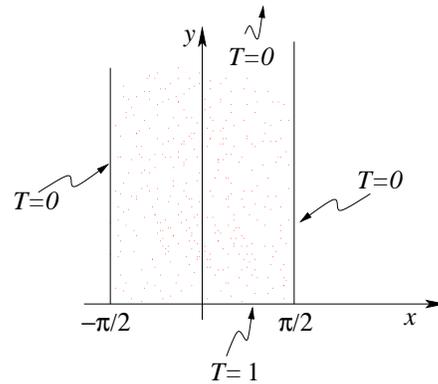


Figura 14.12: Pared semi-infinita.

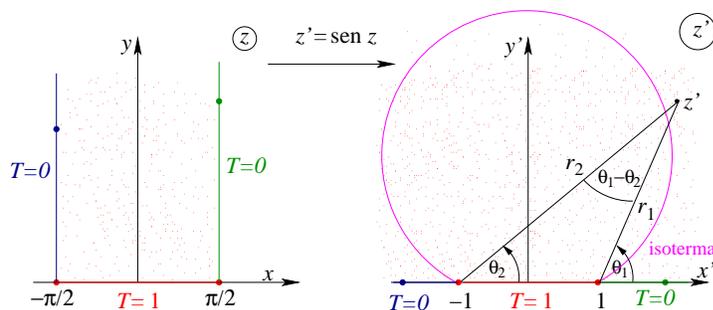
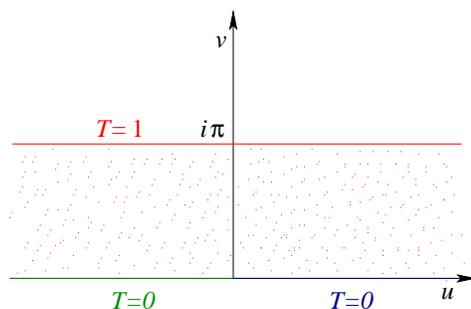


Figura 14.13: Transformación conforme.

Figura 14.14: Transformación conforme $w = \text{Log}[(z' - 1)/(z' + 1)]$.

Combinando a las coordenadas x' e y' del plano z' por medio de la transformación

$$w = \text{Log} \frac{z' - 1}{z' + 1} = \text{Log} \left| \frac{z' - 1}{z' + 1} \right| + i \text{Ang} \frac{z' - 1}{z' + 1}, \quad (14.6)$$

tenemos que

$$v = \text{Ang} \left(\frac{x' - 1 + iy'}{x' + 1 + iy'} \right) = \text{Ang} \left[\frac{x'^2 + y'^2 - 1 + 2iy'}{(x' + 1)^2 + y'^2} \right],$$

o bien

$$v = \arctan \left(\frac{2y'}{x'^2 + y'^2 - 1} \right),$$

donde la función \arctan va entre 0 y π puesto que

$$\text{Ang} \frac{z' - 1}{z' + 1} = \theta_1 - \theta_2,$$

y los ángulos son los indicados en la figura 14.13. Luego

$$T = \frac{1}{\pi} \arctan \left(\frac{2y'}{x'^2 + y'^2 - 1} \right). \quad (14.7)$$

La transformación $w = \text{Log} \frac{z' - 1}{z' + 1}$ es analítica en $y' > 0$. Puesto que la función $T = \frac{v}{\pi}$ es analítica en la franja, la función (14.7) debe ser armónica en $y' > 0$. Las condiciones de borde deben ser las mismas en las partes correspondientes de los bordes.

Isotermas del plano z' : la condición $T = c$ con $0 < c < 1$, tenemos

$$x'^2 + y'^2 - \frac{2}{\tan \pi c} y' - 1 = 0 ,$$

las cuales corresponden a circunferencias con centro en el eje y' y que pasan por los puntos $(\pm 1, 0)$.

Volviendo al problema original, $z' = \operatorname{sen} z$ luego tenemos

$$\begin{aligned} x' &= \operatorname{sen} x \cosh y \\ y' &= \cos x \operatorname{senh} y , \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} T(x, y) &= \frac{1}{\pi} \arctan \left(\frac{2 \cos x \operatorname{senh} y}{\operatorname{sen}^2 x \cosh^2 y + \cos^2 x \operatorname{senh}^2 y - 1} \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \arctan \left(\frac{2 \cos x \operatorname{senh} y}{\cosh^2 - \cos^2 x (\cosh^2 y - \operatorname{senh}^2 y) - 1} \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \arctan \left(\frac{2 \cos x \operatorname{senh} y}{\operatorname{senh}^2 y - \cos^2 x} \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \arctan \left(\frac{2 \cos x / \operatorname{senh}^2 x}{1 - (\cos x / \operatorname{senh} y)^2} \right) , \end{aligned}$$

finalmente

$$T(x, y) = \frac{2}{\pi} \arctan \frac{\cos x}{\operatorname{senh} y} , \quad 0 \leq T \leq 1 . \quad (14.8)$$

Puesto que $\operatorname{sen} z$ es analítica la transformación $z' = \operatorname{sen} z$ asegura que la función (14.8) será armónica en la franja $-\pi/2 < x < \pi/2$, $y > 0$. Además, se mantendrán las condiciones de borde. Más aún, $|T(x, y)| \leq 1$ en la franja. Por lo tanto, (14.8) es la función buscada.

Las isotermas corresponden a $T = c$ es decir dado (14.8)

$$\cos x = \tan \frac{\pi c}{2} \operatorname{senh} y ,$$

cada una de las cuales pasa por los puntos $(\pm \pi/2, 0)$. La líneas de flujo $S(x, y) = \text{cte.}$, con S la función armónica conjugada de $T(x, y)$.

Capítulo 15

Ecuaciones diferenciales.

versión final 2.1 7 de Julio del 2003¹

15.1. Ecuaciones diferenciales parciales, características y condiciones de borde.

En Física el conocimiento de la fuerza en una ecuación de movimiento usualmente conduce a una ecuación diferencial. Por lo tanto, casi todas las partes elementales y numerosas partes avanzadas de la Física teórica están formuladas en términos de ecuaciones diferenciales. Algunas veces son ecuaciones diferenciales ordinarias en una variable (ODE). Más a menudo las ecuaciones son ecuaciones diferenciales parciales (PDE) en dos o más variables.

Recordemos que la operación de tomar una derivada ordinaria o parcial, es una *operación lineal*² (\mathcal{L})

$$\frac{d(a\varphi(x) + b\psi(x))}{dx} = a \frac{d\varphi}{dx} + b \frac{d\psi}{dx} ,$$

para ODE que involucran derivadas en una variable x solamente y no cuadráticas, $(d\psi/dx)^2$, o potencias mayores. Similarmente, para derivadas parciales,

$$\frac{\partial(a\varphi(x, y) + b\psi(x, y))}{\partial x} = a \frac{\partial\varphi(x, y)}{\partial x} + b \frac{\partial\psi(x, y)}{\partial x} .$$

En general

$$\mathcal{L}(a\varphi + b\psi) = a\mathcal{L}(\varphi) + b\mathcal{L}(\psi) . \quad (15.1)$$

Así, las ODE y las PDE aparecen como ecuaciones de operadores lineales

$$\mathcal{L}(\psi) = F ,$$

donde F es una función conocida de una (para ODE) o más variables (para PDE), \mathcal{L} es una combinación lineal de derivadas, ψ es una función o solución desconocida. Cualquier combinación lineal de soluciones es de nuevo una solución; esto es el *principio de superposición*.

¹Este capítulo está basado en el octavo capítulo del libro: *Mathematical Methods for Physicists, fourth edition* de George B. Arfken & Hans J. Weber, editorial ACADEMIC PRESS.

²Estamos especialmente interesados en operadores lineales porque en mecánica cuántica las cantidades físicas están representadas por operadores lineales operando en un espacio complejo de Hilbert de dimensión infinita.

Ya que la dinámica de muchos sistemas físicos involucran sólo dos derivadas, *e.g.*, la aceleración en mecánica clásica y el operador de energía cinética, $\sim \nabla^2$, en mecánica cuántica, las ecuaciones diferenciales de segundo orden ocurren más frecuentemente en Física. [Las ecuaciones de Maxwell y de Dirac son de primer orden pero involucran dos funciones desconocidas. Eliminando una incógnita conducen a una ecuación diferencial de segundo orden por la otra.]

15.1.1. Ejemplos de PDE.

Entre las PDE más frecuentemente encontradas tenemos:

1. La ecuación de Laplace, $\nabla^2\psi = 0$. Esta ecuación muy común y muy importante aparece en el estudio de
 - a. Fenómenos electromagnéticos incluyendo electroestáticos, dieléctricos, corrientes estacionarias y magnetoestática.
 - b. Hidrodinámica (flujo irrotacional de líquidos perfectos y superficies de ondas).
 - c. Flujo de calor.
 - d. Gravitación.
2. La ecuación de Poisson, $\nabla^2\psi = -4\pi\rho$. En contraste a la ecuación homogénea de Laplace, la ecuación de Poisson es no homogénea con un término de fuente $-4\pi\rho$.
3. Las ecuaciones de onda (Helmholtz) y las ecuaciones de difusión tiempo independiente, $\nabla^2\psi \pm k^2\psi = 0$. Estas ecuaciones aparecen en fenómenos tan diversos como
 - a. Ondas elásticas en sólidos, incluyendo cuerdas vibrantes, barras y membranas.
 - b. En sonido o acústica.
 - c. En ondas electromagnéticas.
 - d. En reactores nucleares.
4. La ecuación de difusión tiempo dependiente

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{a^2} \frac{\partial\psi}{\partial t}.$$

5. Las ecuaciones de onda tiempo dependiente,

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}.$$

La forma cuadrimensional que involucra el D'Alembertiano, un análogo cuadrimensional del Laplaciano en el espacio Minkowski,

$$\partial^\mu \partial_\mu = \partial^2 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2.$$

Luego las ecuaciones de onda tiempo dependiente quedan $\partial^2\psi = 0$.

6. La ecuación del potencial escalar, $\partial^2\psi = 4\pi\rho$. Como la ecuación de Poisson esta ecuación es no homogénea con un término de fuente $4\pi\rho$.
7. La ecuación de Klein-Gordon, $\partial^2\psi = -\mu^2\psi$, y las correspondientes ecuaciones vectoriales en las cuales la función escalar ψ es reemplazada por una función vectorial. Otras formas complicadas son comunes.

8. La ecuación de onda de Schrödinger,

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

y

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V\psi = E\psi ,$$

para el caso tiempo independiente.

9. Las ecuaciones para ondas elásticas y líquidos viscosos y la ecuación telegráfica.
10. Ecuaciones diferenciales parciales acopladas de Maxwell para los campos eléctricos y magnéticos son aquellas de Dirac para funciones de ondas relativistas del electrón.

Algunas técnicas generales para resolver PDE de segundo orden son discutidas en esta sección:

1. Separación de variables, donde el PDE es separada en ODEs que están relacionadas por constantes comunes las cuales aparecen como autovalores de operadores lineales, $\mathcal{L}\psi = l\psi$, usualmente en una variable. La ecuación de Helmholtz dada como ejemplo 3 anteriormente tiene esta forma, donde el autovalor k^2 puede surgir por la separación del tiempo t respecto de las variables espaciales. Como en el ejemplo 8, la energía E es el autovalor que surge en la separación de t respecto de \vec{r} en la ecuación de Schrödinger.
2. Conversión de una PDE en una ecuación integral usando funciones de Green que se aplica a PDE no homogéneas tales como los ejemplos 2 y 6 dados más arriba.
3. Otros métodos analíticos tales como el uso de transformadas integrales que serán desarrolladas en el próximo curso.
4. Cálculo numérico. El desarrollo de los computadores ha abierto una abundancia de posibilidades basadas en el cálculo de diferencias finitas. Aquí también tenemos los métodos de relajación. Métodos como Runge-Kutta y predictor-corrector son aplicados a ODEs.

Ocasionalmente, encontramos ecuaciones de orden mayor. En ambos la teoría del movimiento suave de un líquido viscoso y la teoría de un cuerpo elástico encontramos la ecuación

$$(\nabla^2)^2\psi = 0 .$$

Afortunadamente, estas ecuaciones diferenciales de orden más altos son relativamente raras y no son discutidas en una etapa introductoria como esta.

Aunque no son tan frecuentemente encontrados y quizás no son tan importantes como las ecuaciones diferenciales de segundo orden, las ecuaciones diferenciales de primer orden aparecen en Física teórica y algunas veces son pasos intermedios para ecuaciones diferenciales de segundo orden. Las soluciones de algunos de los tipos más importantes de ODE de primer orden son desarrollados en la sección 15.2. Las PDEs de primer orden siempre pueden ser reducidas a ODEs. Este es un proceso directo pero lento e involucra una búsqueda para las características que son presentadas brevemente más adelante.

15.1.2. Clases de PDE y característica.

Las PDEs de segundo orden forman tres clases:

- (i) Las PDEs elípticas que involucran ∇^2 o $c^{-2}\partial^2/\partial t^2 + \nabla^2$.
- (ii) Las PDEs parabólica, $a\partial/\partial t - \nabla^2$.
- (iii) Las PDEs hiperbólica, $c^{-2}\partial^2/\partial t^2 - \nabla^2$.

Estos operadores canónicos aparecen por un cambio de variables $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$ en un operador lineal (para dos variables sólo por simplicidad)

$$\mathcal{L} = a \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2}{\partial y^2} + d \frac{\partial}{\partial x} + e \frac{\partial}{\partial y} + f , \quad (15.2)$$

la cual puede ser reducida a las formas canónicas (i), (ii), (iii) de acuerdo a si el discriminante $D = ac - b^2 > 0$, $= 0$ o < 0 . Si $\xi(x, y)$ es determinada a partir de la ecuación de primer orden, pero no lineal, PDE

$$a \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + 2b \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right) + c \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 = 0 , \quad (15.3)$$

donde los términos de más bajo orden en \mathcal{L} son ignorados, entonces los coeficientes de $\partial^2/\partial \xi^2$ en \mathcal{L} es cero (*i.e.*, ecuación (15.3)). Si η es una solución independiente de la misma ecuación (15.3), entonces el coeficiente de $\partial^2/\partial \eta^2$ también es cero. El operador remanente $\partial^2/\partial \xi \partial \eta$ en \mathcal{L} es característico del caso hiperbólico (iii) con $D < 0$, donde la forma cuadrática $a\lambda^2 + 2b\lambda + c$ es factorizable y, por lo tanto, la ecuación (15.3) tiene dos soluciones independientes $\xi(x, y)$, $\eta(x, y)$. En el caso elíptico (i) con $D > 0$ las dos soluciones ξ , η son complejos conjugados los cuales, cuando se sustituyeron en la ecuación (15.2), remueven la derivada de segundo orden mezclada en vez de los otros términos de segundo orden produciendo la forma canónica (i). En el caso parabólico (ii) con $D = 0$, solamente $\partial^2/\partial \xi^2$ permanece en \mathcal{L} , mientras que los coeficientes de las otras dos derivadas de segundo orden se anulan.

Si los coeficientes a , b , c en \mathcal{L} son funciones de las coordenadas, entonces esta clasificación es solamente local, *i.e.*, su tipo podría cambiar cuando las coordenadas varían.

Ilustremos la física implícita en el caso hiperbólico mirando la ecuación de onda (en 1 + 1 dimensiones por simplicidad)

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \psi = 0 . \quad (15.4)$$

Ya que la ecuación (15.3) se convierte en

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 - c^2 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 = \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} - c \frac{\partial \xi}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} + c \frac{\partial \xi}{\partial x}\right) = 0, \quad (15.5)$$

y es factorizable, determinamos la solución de $\partial \xi / \partial t - c \partial \xi / \partial x = 0$. Esta es una función arbitraria $\xi = F(x + ct)$, y $\xi = G(x - ct)$ resuelve $\partial \xi / \partial t + c \partial \xi / \partial x = 0$, la cual se verifica rápidamente. Por superposición lineal una solución general de la ecuación (15.4) es la suma $\psi = F(x + ct) + G(x - ct)$. Para funciones periódicas F, G reconocemos los argumentos $x + ct$ y $x - ct$ como la fase de la onda plana o frente de ondas, donde las soluciones de la ecuación de onda (15.4) cambian abruptamente (de cero a sus valores actuales) y no están únicamente determinadas. Normal al frente de onda están los rayos de la óptica geométrica. De este modo, las soluciones de la ecuación (15.5) o (15.3) más generalmente, son llamadas *características* o algunas veces *bicaracterísticas* (para PDE de segundo orden) en la literatura matemática corresponde a los frente de ondas de la solución de la óptica geométrica de la ecuación de onda completa.

Para el caso elíptico consideremos la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0, \quad (15.6)$$

para un potencial ψ de dos variables. Aquí la ecuación característica es

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + i \frac{\partial \xi}{\partial y}\right) \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} - i \frac{\partial \xi}{\partial y}\right) = 0 \quad (15.7)$$

tiene soluciones complejas conjugadas: $\xi = F(x + iy)$ para $\partial \xi / \partial x + i \partial \xi / \partial y = 0$ y $\xi = G(x - iy)$ para $\partial \xi / \partial x - i \partial \xi / \partial y = 0$. Una solución general de la ecuación de potencial (15.6) es por lo tanto $\psi = F(x + iy) + iG(x - iy)$. Tanto la parte real como la imaginaria de ψ , son llamadas *funciones armónicas*, mientras que las soluciones polinomiales son llamadas *polinomios armónicos*.

En mecánica cuántica la forma de Wentzel-Kramers-Brillouin (WKB) de $\psi = \exp(-iS/\hbar)$ para la solución de la ecuación de Schrödinger

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V\right) \psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad (15.8)$$

conduce a la ecuación Hamilton-Jacobi de la mecánica clásica,

$$\frac{1}{2m} (\vec{\nabla} S)^2 + V = \frac{\partial S}{\partial t}, \quad (15.9)$$

en el límite $\hbar \rightarrow 0$. La acción clásica de S entonces llega a ser la característica de la ecuación de Schrödinger. Sustituyendo $\vec{\nabla} \psi = -i\psi \vec{\nabla} S / \hbar$, $\partial \psi / \partial t = -i\psi \partial S / \partial t / \hbar$ en la ecuación (15.8), dejando la totalidad de los factores de ψ no nulos, y aproximando el Laplaciano $\nabla^2 \psi = -i\psi \nabla^2 S / \hbar - \psi (\nabla S)^2 / \hbar^2 \simeq -\psi (\nabla S)^2$, *i.e.*, despreciando $-i\nabla^2 \psi / \hbar$, realmente obtenemos la ecuación (15.9).

Resolver las características es una de las técnicas generales de encontrar las soluciones de PDE. Para más ejemplos y tratamientos detallados de las características, las cuales no perseguimos aquí, nos referimos a H. Bateman, *Partial Differential Equations of Mathematical Physics*. New York: Dover (1994); K.E. Gustafson, *Partial Differential Equations and Hilbert Space Methods*, 2nd ed. New York: Wiley (1987).

15.1.3. Las PDE no lineales.

Las ODEs y PDEs no lineales son un campo importante y de rápido crecimiento. Encontramos más arriba la ecuación de onda lineal más simple

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + c \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 ,$$

como la PDE de primer orden a partir de la característica de la ecuación de onda. La ecuación de onda no lineal más simple

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + c(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 , \quad (15.10)$$

resulta si la velocidad local de propagación, c , no es constante sino que depende de la onda ψ . Cuando una ecuación no lineal tiene una solución de la forma $\psi(x, t) = A \cos(kx - \omega t)$, donde $\omega(k)$ varía con k tal que $\omega''(k) \neq 0$, entonces ella es llamada *dispersiva*. Quizás la ecuación dispersiva no lineal más conocida de segundo orden es la ecuación de Korteweg-de Vries

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \psi \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} = 0 , \quad (15.11)$$

la cual modela la propagación sin pérdidas de las ondas de agua superficiales y otros fenómenos. Esta es ampliamente conocida por sus soluciones *solitón*. Un solitón es una onda viajera con la propiedad de persistir a través de una interacción con otro solitón: después de que ellos pasan uno a través del otro, ellos emergen en la misma forma y con la misma velocidad y no adquieren más que un cambio de fase. Sea $\psi(\xi = x - ct)$ tal onda viajera. Cuando es sustituida en la ecuación (15.11) esta produce la ODE no lineal

$$(\psi - c) \frac{d\psi}{d\xi} + \frac{d^3 \psi}{d\xi^3} = 0 , \quad (15.12)$$

la cual puede ser integrada dando

$$\frac{d^2 \psi}{d\xi^2} = c\psi - \frac{\psi^2}{2} . \quad (15.13)$$

No hay constantes de integración aditivas en la ecuación (15.13) para asegurar que se satisfaga la condición $d^2 \psi / d\xi^2 \rightarrow 0$ con $\psi \rightarrow 0$ para ξ grande, tal que ψ está localizado en la característica $\xi = 0$, o $x = ct$. Multiplicando la ecuación (15.13) por $d\psi/d\xi$ e integrando nuevamente tenemos

$$\left(\frac{d\psi}{d\xi} \right)^2 = c\psi^2 - \frac{\psi^3}{3} , \quad (15.14)$$

donde $d\psi/d\xi \rightarrow 0$ para ξ grande. Tomando la raíz de la ecuación (15.14) e integrando una vez más encontramos la solución solitónica

$$\psi(x - ct) = \frac{3c}{\cosh^2 \left(\sqrt{c} \frac{x - ct}{2} \right)} . \quad (15.15)$$

15.1.4. Condiciones de borde.

Usualmente, cuando conocemos un sistema físico en algún momento y la ley que rige ese proceso físico, entonces somos capaces de predecir el desarrollo subsecuente. Tales valores iniciales son las más comunes condiciones de borde asociadas con ODEs y PDEs. Encontrando soluciones que calcen con los puntos, curvas o superficies dados correspondientes al problema de valores de contorno. Las autofunciones usualmente requieren que satisfagan ciertas condiciones de borde impuestas (*e.g.*, asintóticas). Estas condiciones pueden ser tomadas de tres formas:

1. Condiciones de borde de Cauchy. El valor de una función y su derivada normal especificada en el borde. En electrostática estas significarían φ , el potencial, y E_n la componente normal del campo eléctrico.
2. Condiciones de borde de Dirichlet. El valor específico en el borde.
3. Condiciones de borde de Neumann. La derivada normal (gradiente normal) de una función específica en el borde. En el caso electrostático este sería E_n y por lo tanto σ , la densidad de carga superficial.

Un resumen de las relaciones de estos tres tipos de condiciones de borde con los tres tipos de ecuaciones diferenciales parciales bidimensionales están dadas en la tabla 15.1. Para discusiones más extensas de estas ecuaciones diferenciales parciales puede consultar Sommerfeld, capítulo 2, o Morse y Feshbach, capítulo 6.

Partes de la tabla 15.1 son simplemente un asunto de mantener la consistencia interna, o sentido común. Por ejemplo, para la ecuación de Poisson con una superficie cerrada, las condiciones de Dirichlet conducen a una solución única y estable. Las condiciones de Neumann, independiente de las condiciones de Dirichlet, del mismo modo conducen a una solución única y estable independiente de la solución de Dirichlet. Por lo tanto las condiciones de borde de Cauchy (lo que significa la de Dirichlet más la de Neumann) conducen a una inconsistencia.

El término de condiciones de borde incluye como un caso especial el concepto de condiciones iniciales. Por ejemplo, especificando la posición inicial x_0 y la velocidad inicial v_0 en algunos problemas de dinámica correspondería a condiciones de borde de Cauchy. La única diferencia en el presente uso de las condiciones de borde en estos problemas unidimensionales es que estamos aplicando las condiciones en *ambos* extremos del intervalo permitido de la variable.

15.2. Ecuaciones diferenciales de primer orden.

La física involucra algunas ecuaciones diferenciales de primer orden, ellas fueron estudiadas en el primer curso. Por completitud parece ser deseable revisarlas brevemente.

Consideremos aquí ecuaciones diferenciales de la forma general

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}. \quad (15.16)$$

Condiciones de borde	Tipo de ecuación diferencial parcial		
	Elípticas	Hiperbólicas	Parabólicas
	Laplace, Poisson en (x, y)	Ecuación de Ondas en (x, t)	Ecuación de difusión en (x, t)
Cauchy			
Superficie Abierta	Resultados no físicos (inestabilidades)	<i>Solución única y estable</i>	Demasiado restrictivo
Superficie Cerrada	Demasiado restrictivo	Demasiado restrictivo	Demasiado restrictivo
Dirichlet			
Superficie Abierta	Insuficiente	Insuficiente	<i>Solución única y estable en 1 dim</i>
Superficie Cerrada	<i>Solución única y estable</i>	Solución no única	Demasiado restrictivo
Neumann			
Superficie Abierta	Insuficiente	Insuficiente	<i>Solución única y estable en 1 dim</i>
Superficie Cerrada	<i>Solución única y estable</i>	Solución no única	Demasiado restrictivo

Cuadro 15.1:

La ecuación (15.16) es claramente una ecuación de primer orden ordinaria. Es de *primer orden* ya que contiene la primera derivada y no mayores. Es *Ordinaria* ya que la derivada dy/dx es una derivada ordinaria o total. La ecuación (15.16) puede o no puede ser *lineal*, aunque trataremos el caso lineal explícitamente más adelante.

15.2.1. Variables separables.

Frecuentemente la ecuación (15.16) tendrá la forma especial

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) = -\frac{P(x)}{Q(y)}. \quad (15.17)$$

Entonces la podemos reescribir como

$$P(x)dx + Q(y)dy = 0.$$

Integrando de (x_0, y_0) a (x, y) tiende a

$$\int_{x_0}^x P(x')dx' + \int_{y_0}^y Q(y')dy' = 0. \quad (15.18)$$

Ya que los límites inferiores x_0 e y_0 contribuyen en unas constantes, podríamos ignorar los límites inferiores de integración y simplemente añadir una constante de integración al final.

Note que esta técnica de separación de variables *no* requiere que la ecuación diferencial sea lineal.

Ejemplo Ley de Boyle.

Una forma diferencial de la ley de los gases de Boyle es

$$\frac{dV}{dP} = -\frac{V}{P},$$

para el volumen V de una cantidad fija de gas a presión P (y temperatura constante). Separando variables, tenemos

$$\frac{dV}{V} = -\frac{dP}{P}$$

o

$$\ln V = -\ln P + C.$$

Con dos logaritmos presentes, es más conveniente reescribir la constante de integración C como $\ln k$. Entonces

$$\ln V + \ln P = \ln PV = \ln k$$

y

$$PV = k.$$

15.2.2. Ecuaciones diferenciales exactas.

Reescribimos la ecuación (15.16) como

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0. \quad (15.19)$$

Esta ecuación se dice que es *exacta* si podemos calzar el lado izquierdo de ella a un diferencial $d\varphi$,

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy. \quad (15.20)$$

Ya que la ecuación (15.19) tiene un cero a la derecha, buscamos una función desconocida $\varphi(x, y) = \text{constante}$, tal que $d\varphi = 0$. Tenemos (si tal función $\varphi(x, y)$ existe)

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy \quad (15.21)$$

y

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = P(x, y), \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = Q(x, y). \quad (15.22)$$

La condición necesaria y suficiente para que la ecuación sea exacta es que la segunda derivada parcial mezclada de $\varphi(x, y)$ (supuesta continua) es independiente del orden de diferenciación:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x} = \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}. \quad (15.23)$$

Si la ecuación (15.19) corresponde a un rotor (igual cero), entonces un potencial, $\varphi(x, y)$, debiera existir.

Si $\varphi(x, y)$ existe entonces a partir de las ecuaciones (15.19) y (15.21) nuestra solución es

$$\varphi(x, y) = C . \quad (15.24)$$

Podemos construir $\varphi(x, y)$ a partir de sus derivadas parciales de la misma manera que construimos un potencial magnético vectorial en el capítulo de vectores a partir de su rotor.

Podemos volver a la ecuación (15.19) y ver qué pasa si no es exacta: la ecuación (15.23) no es satisfecha. Sin embargo, siempre existe al menos una o quizás una infinidad de factores de integración, $\alpha(x, y)$, tales que

$$\alpha(x, y)P(x, y)dx + \alpha(x, y)Q(x, y)dy = 0$$

es exacta. Desafortunadamente, un factor de integración no siempre es obvio o fácil de encontrar. Diferente es el caso de la ecuación diferencial de primer orden *lineal* considerada a continuación, no hay una manera sistemática de desarrollar un factor de integración para la ecuación (15.19).

Una ecuación diferencial en la cual las variables han sido separadas es automáticamente exacta. Una ecuación diferencial exacta *no* es necesariamente separable.

15.2.3. Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden lineales.

Si $f(x, y)$ en la ecuación (15.16) tiene la forma $-p(x)y + q(x)$, entonces la ecuación (15.16) se convierte en

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x) . \quad (15.25)$$

La ecuación (15.25) es la ODE de primer orden *lineal* más general. Si $q(x) = 0$, la ecuación (15.25) es homogénea (en y). Un $q(x)$ distinto de cero puede representar una fuente o un término de forzamiento. La ecuación (15.25) es *lineal*; cada término es lineal en y o dy/dx . No hay potencias mayores; esto es, no hay y^2 , ni productos, $y(dy/dx)$. Note que la linealidad se refiere a y y a la dy/dx ; $p(x)$ y $q(x)$ no es necesario que sean lineales en x . La ecuación (15.25), es la más importante de estas ecuaciones diferenciales de primer orden para los físicos y puede ser resuelta exactamente.

Busquemos un *factor de integración* $\alpha(x)$ tal que

$$\alpha(x)\frac{dy}{dx} + \alpha(x)p(x)y = \alpha(x)q(x) , \quad (15.26)$$

puede ser reescrito como

$$\frac{d}{dx}[\alpha(x)y] = \alpha(x)q(x) . \quad (15.27)$$

El propósito de esto es hacer el lado izquierdo de la ecuación (15.25) una derivada total que pueda ser integrada por inspección. Esto también, incidentalmente, hace la ecuación (15.25) exacta. Expandiendo la ecuación (15.27), obtenemos

$$\alpha(x)\frac{dy}{dx} + \frac{d\alpha}{dx}y = \alpha(x)q(x) .$$

La comparación con la ecuación (15.26) muestra que debemos requerir que

$$\frac{d\alpha(x)}{dx} = \alpha(x)p(x) . \quad (15.28)$$

Aquí hay una ecuación diferencial para $\alpha(x)$, con las variables α y x separables. Separamos variables, integramos, y obtenemos

$$\alpha(x) = \exp \left[\int^x p(x') dx' \right] \quad (15.29)$$

como nuestro factor de integración.

Con $\alpha(x)$ conocida procedemos a integrar la ecuación (15.27). Esto, por supuesto, fue el objetivo de introducir α en primer lugar. Tenemos

$$\int^x \frac{d}{dx'} [\alpha(x')y] dx' = \int^x \alpha(x')q(x') dx' .$$

Ahora integrando por inspección, tenemos

$$\alpha(x)y = \int^x \alpha(x')q(x') dx' + C .$$

Las constantes a partir del límite inferior de integración constante son reunidas en la constante C . Dividiendo por $\alpha(x)$, obtenemos

$$y(x) = \frac{1}{\alpha(x)} \left\{ \int^x \alpha(x')q(x') dx' + C \right\} .$$

Finalmente, sustituyendo en la ecuación (15.29) por α conduce

$$y(x) = \exp \left[- \int^x p(t) dt \right] \left\{ \int^x \exp \left[\int^s p(t) dt \right] q(s) ds + C \right\} . \quad (15.30)$$

Aquí las variables mudas de integración han sido reescritas para hacerlas inambiguas. La ecuación (15.30) es la solución general completa de la ecuación diferencial lineal, de primer orden, la ecuación (15.25). La porción

$$y_1(x) = C \exp \left[- \int^x p(t) dt \right] \quad (15.31)$$

corresponde al caso $q(x) = 0$ y es solución general de la ecuación diferencial homogénea. El otro término en la ecuación (15.30),

$$y(x) = \exp \left[- \int^x p(t) dt \right] \int^x \exp \left[\int^s p(t) dt \right] q(s) ds , \quad (15.32)$$

es una solución particular que corresponde al término específico de fuente $q(x)$.

Podemos notar que si nuestra ecuación diferencial de primer orden es homogénea ($q = 0$), entonces ella es separable. De lo contrario, salvo casos especiales tal como $p = \text{constante}$, $q = \text{constante}$, o $q(x) = ap(x)$, la ecuación (15.25) no es separable.

Ejemplo Circuito RL.

Para un circuito resistencia-inductancia las leyes de Kirchhoff producen

$$L \frac{dI(t)}{dt} + RI(t) = V(t) ,$$

para la corriente $I(t)$, donde L es la inductancia y R es la resistencia, ambas constantes. $V(t)$ es el voltaje aplicado tiempo dependiente.

De la ecuación (15.29) nuestro factor de integración $\alpha(t)$ es

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= \exp \int \frac{R}{L} dt \\ &= e^{Rt/L} . \end{aligned}$$

Entonces por la ecuación (15.30)

$$I(t) = e^{-Rt/L} \left[\int e^{Rt/L} \frac{V(t)}{L} dt + C \right] ,$$

con la constante C es determinada por una condición inicial (una condición de borde).

Para el caso especial $V(t) = V_0$, una constante,

$$\begin{aligned} I(t) &= e^{-Rt/L} \left[\frac{V_0}{L} \frac{L}{R} e^{Rt/L} + C \right] \\ &= \frac{V_0}{R} + C e^{-Rt/L} . \end{aligned}$$

Si la condición inicial es $I(0) = 0$, entonces $C = -V_0/R$ y

$$I(t) = \frac{V_0}{R} [1 - e^{-Rt/L}] .$$

15.2.4. Conversión a una ecuación integral.

Nuestra ecuación diferencial de primer orden, ecuación (15.16), puede ser convertida a una ecuación integral por integración directa:

$$y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^x f[x, y(x)] dx . \quad (15.33)$$

Como una ecuación integral hay una posibilidad de una solución en serie de Neumann (se verá en el próximo curso) con la aproximación inicial $y(x) \approx y(x_0)$. En la literatura de ecuaciones diferenciales esto es llamado el “método de Picard de aproximaciones sucesivas”.

Ecuaciones diferenciales de primer orden las encontraremos de nuevo en conexión con las transformadas de Laplace y de Fourier.

15.3. Separación de variables.

Las ecuaciones de la física matemática listada en la sección 15.1 son todas ecuaciones diferenciales parciales. Nuestra primera técnica para su solución es dividir la ecuación diferencial parcial en n ecuaciones diferenciales ordinarias de n variables. Cada separación introduce una constante de separación arbitraria. Si tenemos n variables, tenemos que introducir $n - 1$ constantes, determinadas por las condiciones impuestas al resolver el problema.

15.3.1. Coordenadas cartesianas.

En coordenadas cartesianas las ecuaciones de Helmholtz llegan a ser

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + k^2 \psi = 0, \quad (15.34)$$

usando la forma cartesiana para el Laplaciano. Por el momento, k^2 será una constante. Quizás la manera más simple de tratar una ecuación diferencial parcial tal como la ecuación (15.34) es dividirla en un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias. Esto puede ser hecho como sigue. Sea

$$\psi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z), \quad (15.35)$$

y sustituir de vuelta en la ecuación (15.34). ¿Cómo sabemos que la ecuación (15.35) es válida?. La respuesta es muy simple: ¡No sabemos si es válida!. Mejor dicho, estamos procediendo en este espíritu y tratando de ver si trabaja. Si nuestro intento es exitoso, entonces la ecuación (15.35) será justificada. Si no es exitoso, lo descubriremos pronto y luego trataremos otro ataque tal como las funciones de Green, transformadas integral, o análisis numérico a la fuerza bruta. Con ψ supuestamente dada por la ecuación (15.35), la ecuación (15.34) llega a ser

$$YZ \frac{d^2 X}{dx^2} + XZ \frac{d^2 Y}{dy^2} + XY \frac{d^2 Z}{dz^2} + k^2 XYZ = 0. \quad (15.36)$$

Dividiendo por $\psi = XYZ$ y reorganizando los términos, obtenemos

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -k^2 - \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} - \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2}. \quad (15.37)$$

La ecuación (15.37) exhibe una separación de variables. El lado izquierdo es sólo función de x , mientras que el lado derecho depende solamente de y y z . Así la ecuación (15.37) es una clase de paradoja. Una función de x es igualada a una función de y y z , pero x , y y z son todas coordenadas independientes. Esta independencia significa que el comportamiento de x como una variable independiente no está determinada ni por y ni por z . La paradoja está resuelta fijando cada lado igual a una constante, una constante de separación. Escogemos³

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -l^2, \quad (15.38)$$

³La elección de signo es completamente arbitraria, será fijada en un problema específico por la necesidad de satisfacer las condiciones de borde.

$$-k^2 - \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} - \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -l^2 . \quad (15.39)$$

Ahora, volviendo nuestra atención a la ecuación (15.39), obtenemos

$$\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -k^2 + l^2 - \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} , \quad (15.40)$$

y una segunda separación ha sido realizada. Aquí tenemos una función de y igualada a una función de z y aparece la misma paradoja. La resolvemos como antes igualando cada lado a otra constante de separación, $-m^2$,

$$\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -m^2 , \quad (15.41)$$

$$\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -k^2 + l^2 + m^2 = -n^2 , \quad (15.42)$$

introduciendo una constante n^2 por $k^2 = l^2 + m^2 + n^2$ para producir un conjunto simétrico de ecuaciones. Ahora tenemos tres ecuaciones diferenciales ordinarias ((15.38), (15.41), y (15.42)) para reemplazar en la ecuación (15.34). Nuestra suposición (ecuación (15.35)) ha sido exitosa y es por lo tanto justificada.

Nuestra solución sería etiquetada de acuerdo a la elección de nuestras constantes l , m , n , esto es,

$$\psi_{lmn}(x, y, z) = X_l(x)Y_m(y)Z_n(z) . \quad (15.43)$$

Sujeto a las condiciones del problema que se resuelve y a la condición $k^2 = l^2 + m^2 + n^2$, podemos escoger l , m , n como queramos, y la ecuación (15.43) será todavía una solución de la ecuación (15.34), dado que $X_l(x)$ es una solución de la ecuación (15.38) y así seguimos. Podemos desarrollar la solución más general de la ecuación (15.34) tomando una combinación lineal de soluciones ψ_{lmn} ,

$$\Psi = \sum_{l,m,n} a_{lmn} \psi_{lmn} . \quad (15.44)$$

Los coeficientes constantes a_{lmn} finalmente son escogidos para permitir que Ψ satisfaga las condiciones de borde del problema.

15.3.2. Coordenadas cilíndricas circulares.

Si consideramos que nuestra función desconocida ψ depende de ρ , φ , z la ecuación de Helmholtz se convierte en

$$\nabla^2 \psi(\rho, \varphi, z) + k^2 \psi(\rho, \varphi, z) = 0 , \quad (15.45)$$

o

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + k^2 \psi = 0 . \quad (15.46)$$

Como antes, suponemos una forma factorizada para ψ ,

$$\psi(\rho, \varphi, z) = P(\rho)\Phi(\varphi)Z(z) . \quad (15.47)$$

Sustituyendo en la ecuación (15.46), tenemos

$$\frac{\Phi Z}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dP}{d\rho} \right) + \frac{PZ}{\rho^2} \frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + P\Phi \frac{d^2Z}{dz^2} + k^2 P\Phi Z = 0 . \quad (15.48)$$

Todas las derivadas parciales han llegado a ser derivadas ordinarias. Dividiendo por $P\Phi Z$ y moviendo la derivada z al lado derecho conduce a

$$\frac{1}{P\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dP}{d\rho} \right) + \frac{1}{\rho^2\Phi} \frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + k^2 = -\frac{1}{Z} \frac{d^2Z}{dz^2} . \quad (15.49)$$

De nuevo, tenemos la paradoja. Una función de z en la derecha aparece dependiendo de una función de ρ y φ en el lado izquierdo. Resolvemos la paradoja haciendo cada lado de la ecuación (15.49) igual a una constante, la misma constante. Escojamos⁴ $-l^2$. Entonces

$$\frac{d^2Z}{dz^2} = l^2 Z , \quad (15.50)$$

y

$$\frac{1}{P\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dP}{d\rho} \right) + \frac{1}{\rho^2\Phi} \frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + k^2 = -l^2 . \quad (15.51)$$

Ajustando $k^2 + l^2 = n^2$, multiplicando por ρ^2 , y reordenando términos, obtenemos

$$\frac{\rho}{P} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dP}{d\rho} \right) + n^2 \rho^2 = -\frac{1}{\Phi} \frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} . \quad (15.52)$$

Podemos ajustar el lado derecho a m^2 y

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} = -m^2\Phi \quad (15.53)$$

Finalmente, para la dependencia en ρ tenemos

$$\rho \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dP}{d\rho} \right) + (n^2 \rho^2 - m^2)P = 0 . \quad (15.54)$$

Esta es la ecuación diferencial de Bessel. La solución y sus propiedades serán presentadas en el próximo curso. La separación de variables de la ecuación de Laplace en coordenadas parabólicas también conduce a ecuaciones de Bessel. Puede notarse que la ecuación de Bessel es notable por la variedad de formas que puede asumir.

La ecuación original de Helmholtz, una ecuación diferencial parcial tridimensional, ha sido reemplazada por tres ecuaciones diferenciales ordinarias, las ecuaciones (15.50), (15.53) y (15.54). Una solución de la ecuación de Helmholtz es

$$\psi(\rho, \varphi, z) = P(\rho)\Phi(\varphi)Z(z) . \quad (15.55)$$

Identificando las soluciones específicas P , Φ , Z por subíndices, vemos que la solución más general de la ecuación de Helmholtz es una combinación lineal del producto de soluciones:

$$\psi(\rho, \varphi, z) = \sum_{m,n} a_{mn} P_{mn}(\rho)\Phi_m(\varphi)Z_n(z) . \quad (15.56)$$

⁴La elección del signo de la constante de separación es arbitraria. Sin embargo, elegimos un signo menos para la coordenada axial z en espera de una posible dependencia exponencial en z . Un signo positivo es elegido para la coordenada azimutal φ en espera de una dependencia periódica en φ .

15.3.3. Coordenadas polares esféricas.

Tratemos de separar la ecuación de Helmholtz, de nuevo con k^2 constante, en coordenadas polares esféricas. Usando la expresión del Laplaciano en estas coordenadas obtenemos

$$\frac{1}{r^2 \operatorname{sen} \theta} \left[\operatorname{sen} \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\operatorname{sen} \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\operatorname{sen} \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} \right] = -k^2 \psi . \quad (15.57)$$

Ahora, en analogía con la ecuación (15.35) tratamos

$$\psi(r, \theta, \varphi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi) . \quad (15.58)$$

Sustituyendo de vuelta en la ecuación (15.57) y dividiendo por $R\Theta\Phi$, tenemos

$$\frac{1}{Rr^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{\Theta r^2 \operatorname{sen} \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\operatorname{sen} \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{1}{\Phi r^2 \operatorname{sen}^2 \theta} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = k^2 . \quad (15.59)$$

Note que todas las derivadas son ahora derivadas ordinarias más que parciales. Multiplicando por $r^2 \operatorname{sen}^2 \theta$, podemos aislar $(1/\Phi)(d^2\Phi/d\varphi^2)$ para obtener⁵

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = r^2 \operatorname{sen}^2 \theta \left[-k^2 - \frac{1}{r^2 R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) - \frac{1}{r^2 \operatorname{sen} \theta \Theta} \frac{d}{d\theta} \left(\operatorname{sen} \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) \right] . \quad (15.60)$$

La ecuación (15.60) relaciona una función únicamente de φ con una función de r y θ . Ya que r , θ , y φ son variables independientes, igualamos cada lado de la ecuación (15.60) a una constante. Aquí una pequeña consideración puede simplificar el análisis posterior. En casi todos los problemas físicos φ aparecerá como un ángulo azimutal. Esto sugiere una solución periódica más que una exponencial. Con esto en mente, usemos $-m^2$ como la constante de separación. Cualquier constante lo hará, pero ésta hará la vida un poquito más fácil. Entonces

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = -m^2 \quad (15.61)$$

y

$$\frac{1}{r^2 R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen} \theta \Theta} \frac{d}{d\theta} \left(\operatorname{sen} \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) - \frac{m^2}{r^2 \operatorname{sen}^2 \theta} = -k^2 . \quad (15.62)$$

Multiplicando la ecuación (15.62) por r^2 y reordenando términos, tenemos

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + r^2 k^2 = -\frac{1}{\operatorname{sen} \theta \Theta} \frac{d}{d\theta} \left(\operatorname{sen} \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{m^2}{\operatorname{sen}^2 \theta} . \quad (15.63)$$

Nuevamente, las variables son separadas. Igualamos cada lado a una constante Q y finalmente obtenemos

$$\frac{1}{\operatorname{sen} \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\operatorname{sen} \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) - \frac{m^2}{\operatorname{sen}^2 \theta} \Theta + Q\Theta = 0 , \quad (15.64)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + k^2 R - \frac{QR}{r^2} = 0 . \quad (15.65)$$

⁵El orden en el cual las variables son separadas aquí no es único. Muchos textos de mecánica cuántica separan la dependencia en r primero.

Una vez más hemos reemplazado una ecuación diferencial parcial de tres variables por tres ecuaciones diferenciales ordinarias. Las soluciones de estas tres ecuaciones diferenciales ordinarias son discutidas en el próximo curso. Por ejemplo, la ecuación (15.64) es identificada como la ecuación de asociada de Legendre en la cual la constante Q llega a ser $l(l+1)$; con l entero. Si k^2 es una constante (positiva), la ecuación (15.65) llega a ser la ecuación de Bessel esférica.

Nuevamente, nuestra solución más general puede ser escrita

$$\psi_{Qm}(r, \theta, \varphi) = \sum_{q,m} R_Q(r) \Theta_{Qm}(\theta) \Phi_m(\varphi) . \quad (15.66)$$

La restricción que k^2 sea una constante es innecesariamente severa. El proceso de separación será todavía posible para k^2 tan general como

$$k^2 = f(r) + \frac{1}{r^2}g(\theta) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}h(\varphi) + k'^2 . \quad (15.67)$$

En el problema del átomo de hidrógeno, uno de los ejemplos más importantes de la ecuación de onda de Schrödinger con una forma cerrada de solución es $k^2 = f(r)$. La ecuación (15.65) para el átomo de hidrógeno llega a ser la ecuación asociada de Laguerre.

La gran importancia de esta separación de variables en coordenadas polares esféricas deriva del hecho que el caso $k^2 = k^2(r)$ cubre una tremenda cantidad de física: las teorías de gravitación, electrostática, física atómica y física nuclear. Y, con $k^2 = k^2(r)$, la dependencia angular es aislada en las ecuaciones (15.61) y (15.64), *la cual puede ser resuelta exactamente*.

Finalmente, una ilustración de cómo la constante m en la ecuación (15.61) es restringida, notamos que φ en coordenadas polares esféricas y cilíndricas es un ángulo azimutal. Si esto es un problema clásico, ciertamente requeriremos que la solución azimutal $\Phi(\varphi)$ sea univaluada, esto es,

$$\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi) . \quad (15.68)$$

Esto es equivalente a requerir que la solución azimutal tenga un período de 2π o algún múltiplo entero de él. Por lo tanto m debe ser un entero. Cuál entero, depende de los detalles del problema. Cada vez que una coordenada corresponda a un eje de translación o a un ángulo azimutal la ecuación separada siempre tendrá la forma

$$\frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2} = -m^2\Phi(\varphi)$$

para φ , el ángulo azimutal, y

$$\frac{d^2Z}{dz^2} = \pm a^2 Z(z) \quad (15.69)$$

para z , un eje de translación en un sistema de coordenadas cilíndrico. Las soluciones, por supuesto, son $\sin az$ y $\cos az$ para $-a^2$ y la correspondiente función hiperbólica (o exponencial) $\sinh az$ y $\cosh az$ para $+a^2$.

Otras ecuaciones diferenciales ordinarias encontradas ocasionalmente incluyen las ecuaciones de Laguerre y la asociada de Laguerre del importante problema del átomo de hidrógeno en mecánica cuántica:

$$x \frac{d^2y}{dx^2} + (1-x) \frac{dy}{dx} + \alpha y = 0 , \quad (15.70)$$

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} + (1 + k - x) \frac{dy}{dx} + \alpha y = 0 . \tag{15.71}$$

De la teoría de la mecánica cuántica del oscilador armónico lineal tenemos la ecuación de Hermite,

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + 2\alpha y = 0 . \tag{15.72}$$

Finalmente, de vez en vez encontramos la ecuación diferencial de Chebyshev

$$(1 - x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} + n^2 y = 0 . \tag{15.73}$$

Para una referencia conveniente, las formas de la solución de la ecuación de Laplace, la ecuación de Helmholtz y la ecuación de difusión en coordenadas polares esféricas son resumidas en la tabla 15.2. Las soluciones de la ecuación de Laplace en coordenadas circulares cilíndricas son representadas en la tabla 15.3.

$\psi = \sum_{l,m} a_{lm} \psi_{lm}$		
1. $\nabla^2 \psi = 0$	$\psi_{lm} = \left\{ \begin{array}{l} r^l \\ r^{-l-1} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} P_l^m(\cos \theta) \\ Q_l^m(\cos \theta) \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \cos m\varphi \\ \text{sen } m\varphi \end{array} \right\}$	
2. $\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0$	$\psi_{lm} = \left\{ \begin{array}{l} j_l(kr) \\ n_l(kr) \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} P_l^m(\cos \theta) \\ Q_l^m(\cos \theta) \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \cos m\varphi \\ \text{sen } m\varphi \end{array} \right\}$	
3. $\nabla^2 \psi - k^2 \psi = 0$	$\psi_{lm} = \left\{ \begin{array}{l} i_l(kr) \\ k_l(kr) \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} P_l^m(\cos \theta) \\ Q_l^m(\cos \theta) \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \cos m\varphi \\ \text{sen } m\varphi \end{array} \right\}$	

Cuadro 15.2: Soluciones en coordenadas polares esféricas

$\psi = \sum_{m,\alpha} a_{m\alpha} \psi_{m\alpha} , \quad \nabla^2 \psi = 0$		
a.	$\psi_{m\alpha} = \left\{ \begin{array}{l} J_m(\alpha\rho) \\ N_m(\alpha\rho) \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \cos m\varphi \\ \text{sen } m\varphi \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} e^{-\alpha z} \\ e^{\alpha z} \end{array} \right\}$	
b.	$\psi_{m\alpha} = \left\{ \begin{array}{l} I_m(\alpha\rho) \\ K_m(\alpha\rho) \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \cos m\varphi \\ \text{sen } m\varphi \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \cos \alpha z \\ \text{sen } \alpha z \end{array} \right\}$	
c. $\alpha = 0$ (no hay dependencia en z)	$\psi_m = \left\{ \begin{array}{l} \rho^m \\ \rho^{-m} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \cos m\varphi \\ \text{sen } m\varphi \end{array} \right\}$	

Cuadro 15.3: Soluciones en coordenadas cilíndricas circulares

Para las ecuaciones de Helmholtz y de difusión la constante $\pm k^2$ se agrega a la constante de separación $\pm\alpha^2$ para definir un nuevo parámetro γ^2 o $-\gamma^2$. Para la elección de $+\gamma^2$ (con $\gamma^2 > 0$) obtenemos $J_m(\gamma\rho)$ y $N_m(\gamma\rho)$. Para la elección $-\gamma^2$ (con $\gamma^2 > 0$) obtenemos $I_m(\gamma\rho)$ y $K_m(\gamma\rho)$ como previamente.

Estas ecuaciones diferenciales ordinarias y sus generalizaciones serán examinadas y sistematizadas en el próximo curso.